

Wykorzystanie kryterium stateczności Hilla w analizie deformacji nasypu na podłożu górnictwym

Dr inż. Krzysztof Sternik

Politechnika Śląska w Gliwicach, Wydział Budownictwa

Stateczność skarp i zboczy analizuje się na podstawie teorii plastyczności. Wyróżnia się dwie podstawowe grupy metod obliczeń stateczności: na podstawie granicznego stanu naprężenia w ośrodku gruntowym i na podstawie analizy równowagi granicznej bryły osuwającej się wzdłuż powierzchni poślizgu. Podstawy teoretyczne oceny stateczności oraz elementy projektowania skarp i nasypów drogowych przedstawiono, między innymi, w [21].

W metodach granicznego stanu naprężenia zakłada się wystąpienie idealnie plastycznego stanu zniszczenia w całej objętości

skarpy. Jest to jednorodny stan zniszczenia. Metody równowagi granicznej są inżynierską próbą opisu występującego zwykle w rzeczywistości zniszczenia zlokalizowanego w wąskiej strefie o kształcie łuku kołowego lub łamanej. W obu grupach metod zakłada się kryterium stanu granicznego Coulomba-Mohra jako kryterium zniszczenia.

Zarówno metody równowagi granicznej, których przegląd zawiera, między innymi [8], jak i granicznego stanu naprężenia ([1, 2, 5]) zaniedbują dobrze udokumentowany fakt zależności reakcji gruntu od ścieżki obciążenia. Poprawna ocena stateczno-

ści skarpy i mechanizmu zniszczenia wymaga przeanalizowania zmian odkształcenia i naprężenia w rozważanym obszarze przy użyciu adekwatnego modelu konstytutywnego oraz rozwiązania zagadnienia brzegowego przy użyciu metod numerycznych, np. MES.

Zniszczenie gruntu może nastąpić przed osiągnięciem warunków stanu granicznego Coulomba-Mohra. Tak jest w przypadku wytworzenia się pasm ścinania. Wówczas wyznacznik tensora akustycznego przyjmuje wartość zerową ([16, 17]). W pewnych warunkach (np. obciążenie luźnego piasku w warunkach bez odpływu) zniszczenie może nastąpić bez wyraźnego uformowania się pasma ścinania. Jest to tzw. zniszczenie rozmyte. Analitycznie identyfikowane jest ono przez zerowanie się iloczynu składowych przyrostów naprężenia i odkształcenia. Jest to kryterium stateczności materiałowej podane przez Hilla [12]. Wspomniany iloczyn zwany jest pracą drugiego rzędu. Jak wykazali Bigoni i Hueckel [3], praca drugiego rzędu zeruje się, zanim zaniknie wartość wyznacznika tensora akustycznego. Zatem, dopóki praca drugiego rzędu jest dodatnia, nie może wystąpić żadna forma zniszczenia.

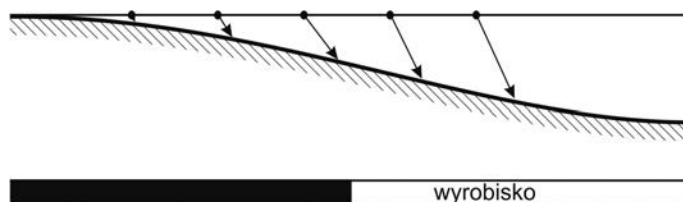
Tematyka analizy obliczeniowej konstrukcji ziemnych poddanych deformacjom górnicy jest szeroko omawiana w literaturze krajowej ([4, 9, 10, 11, 19, 20]). Jednym z pierwszoplanowych problemów jest prognozowanie stateczności skarp wysokich nasypów drogowych przy przejściu górniczej niecki obniżeniowej. Wypukła krzywizna powierzchni terenu powoduje rozluźnienie gruntów podłoża i największe rozciąganie korpusu nasypu.

W niniejszym artykule opisano zastosowanie kryterium Hilla do identyfikacji zagrożenia utratą stateczności nasypu poddanego deformacjom wynikającym z wypukłej krzywizny niecki górniczej. Analizę zagadnienia przeprowadzono programem metody elementów skończonych Z_Soil [22]. Do opisu gruntu nasypu zastosowano sprężysto-plastyczny model *Hardening Soil* [17].

NASYPY NA TERENACH GÓRNICZYCH

Konsekwencją podziemnej aktywności przemysłowej są ciągłe i nieciągłe deformacje powierzchni terenu. Nieciągłe deformacje powierzchni objawiają się skokowym obniżeniem powierzchni w postaci szczelin, stopni, lejów i zapadlisk. Ciągłe deformacje występują, gdy przemieszczenia poszczególnych punktów powierzchni są ciągłymi funkcjami czasu i położenia [13]. Podstawowym wskaźnikiem deformacji ciągłej jest jej obniżenie w dowolnym punkcie. Wskaźnikami będącymi pochodnymi obniżenia są: nachylenie i krzywizna powierzchni, a także poziome odkształcenia powierzchni. Efektem deformacji ciągłych jest niecka obniżeniowa (rys. 1).

Do sposobów zabezpieczenia nasypów drogowych na terenach górniczych zalicza się zabezpieczenie geosyntetykami lub innymi elementami przeciw siłom rozciągającym w podstawie. O ile można zabezpieczać nasyp przed destrukcyjnym wpływem poziomych odkształceń rozciągających, o tyle zabezpieczenie przed wpływem wypukłej krzywizny terenu wymagałoby stosowania posadowienia na sztywnej płycie. Takie rozwiązanie jest w praktyce niewykonalne ze względu na zakres wzmocnienia. Szerokość podstawy wysokiego nasypu może przekraczać 100 m.



Rys. 1. Niecka obniżeniowa
– widoczne wypadkowe przemieszczenia powierzchni terenu

KRYTERIUM STATECZNOŚCI HILLA

W inżynierii pojęcie stateczności lub stabilności może odnosić się do materiału, elementu konstrukcji, czy w końcu do całej konstrukcji. Układ jest stateczny, gdy małe zaburzenie jego równowagi spowoduje mały skutek, a po ustaniu przyczyny zaburzeń, układ znowu powróci do równowagi. Gdy układ jest niestateczny, to mała przyczyna spowoduje duży skutek, np. przejście do nowego stanu równowagi. Przykładem jest skarpa o obciążonym naziomiu, która pod wpływem ciężaru własnego gruntu ją budującego oraz zmieniającego się obciążenia naziomu zmienia kształt od większego do mniejszego nachylenia.

W analizie stateczności materiału najpowszechniej stosowanym kryterium jest kryterium stanu granicznego Coulomba-Mohra. Stan graniczny występuje wówczas, gdy wyznacznik macierzy konstytutywnej charakteryzującej materiał przyjmuje wartość zerową, $\det \mathbf{D} = 0$.

Niejednorodność ośrodka gruntowego może wywołać lokalizację odkształceń plastycznych w pasmach ścinania, co objawia się lokalnym osłabieniem materiału i opadającą krzywą „odkształcenie – naprężenie”. Do poprawnego rozwiązania problemu lokalizacji deformacji jest niezbędne zastosowanie nielokalnego modelu konstytutywnego lub modelu z gradientami drugiego rzędu [15]. Utrata kontroli nad zachowaniem się materiału pod obciążeniem w przypadku osłabienia i lokalizacji deformacji następuje, gdy zeruje się wartość wyznacznika tensora akustycznego $\det (n_i D_{ijkl} n_j) = 0$ [16].

Niestabilność materiału może przybrać formę zniszczenia rozmytego. W tej formie utraty stateczności nie obserwuje się koncentracji odkształceń. W przeciwieństwie do niestabilności zlokalizowanej może ona nastąpić w fazie wzmocnienia [6].

Hill w [12] zaproponował kryterium stabilności ciała sprężysto-plastycznego identyfikującego zniszczenie rozmyte. Przy małych odkształceniach przybiera ono postać:

$$\int_V d\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} dV > 0 \quad \forall \|d\epsilon\| \neq 0 \quad (1)$$

gdzie:

$d\sigma_{ij}$ – przyrost naprężenia Cauchy'ego,

$d\epsilon_{ij}$ – przyrost odkształcenia związany z przyrostem naprężenia prawem konstytutywnym

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\epsilon_{kl} \quad (2)$$

Jest to kryterium wystarczające lecz nie konieczne do zachowania stateczności. Oznacza to, że dopóki związek (1) jest zachowany, mamy pewność, że stateczność ciała jest zachowana, natomiast z chwilą, kiedy związek ten przestaje obowiązywać, zachodzi możliwość utraty stateczności.

Warunek (1) w punkcie materialnym przybiera postać:

$$d^2W = d\sigma_{ij}d\epsilon_{ij} > 0 \quad \forall \|d\epsilon\| \neq 0 \quad (3)$$

Dla materiałów z niestowarzyszonym prawem płynięcia tensor konstytutywny $\mathbf{D}$ jest niesymetryczny. Praca drugiego rzędu w punkcie wynosi:

$$\begin{aligned} d^2W &= d\epsilon : d\sigma = d\epsilon : \mathbf{D} : d\epsilon = \\ &= d\epsilon : (\mathbf{D}^{sym} + \mathbf{D}^{asym}) : d\epsilon = d\epsilon : \mathbf{D}^{sym} : d\epsilon \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie:

$\mathbf{D}^{sym}$, $\mathbf{D}^{asym}$ – część symetryczna i antysymetryczna tensora konstytutywnego.

Zgodnie z kryterium Hilla materiał jest stateczny, gdy $d^2W > 0$, co jest równoznaczne ze spełnieniem warunku:

$$\det \mathbf{D}^{sym} > 0 \quad (5)$$

W ujęciu metody elementów skończonych wartość pracy drugiego rzędu może być obliczona w każdym punkcie Gaussa. Stwierdzenie wartości $d^2W \leq 0$ oznacza, że obciążenie może prowadzić w danym punkcie do niekontrolowanego zachowania się materiału.

Warunek zerowania się wyznacznika symetrycznej części macierzy konstytutywnej $\det \mathbf{D}^{sym} = 0$ odgrywa szczególną rolę w analizie utraty stateczności, stanowi bowiem ograniczenie dolne w pozostałych wymienionych warunkach (lokalizacji i stanu granicznego) [3]. Dopóki jest spełniony warunek (5), nie wystąpi żadna forma niestateczności materiałowej. Kryterium to może być stosowane, gdy opis ośrodka gruntowego odbywa się za pomocą związków konstytutywnych z niestowarzyszonym prawem płynięcia uwzględniających wzmocnienie materiału.

MODEL KONSTYTUTYWNY HARDENING SOIL – KRÓTKI OPIS

Do opisu gruntu wykorzystano model konstytutywny *Hardening Soil*. Model ten jest modelem sprężysto-plastycznym z wzmocnieniem oraz niestowarzyszonym prawem płynięcia plastycznego wprowadzonym do mechanizmu ścinania. Większa dokładność przy obliczaniu odkształceń w porównaniu z modelami sprężysto-idealnie plastycznymi wynika z faktu zastosowania trzech parametrów charakteryzujących sztywność przy obciążeniu w aparacie trójosiowego ściskania E_{50} , przy odciążeniu E_{ur} i modułu edometrycznego E_{oed} .

Podstawą sformułowania modelu *Hardening Soil* jest stwierdzenie w aparacie trójosiowego ściskania podczas pierwotnego obciążenia hiperboliczna zależność między odkształceniem pionowym ϵ_1 a naprężeniem dewiatorowym q (rys. 2).

Powierzchnię plastyczności (rys. 3) określa się dwoma równaniami. Pierwsze z nich określa mechanizm dewiatorowy:

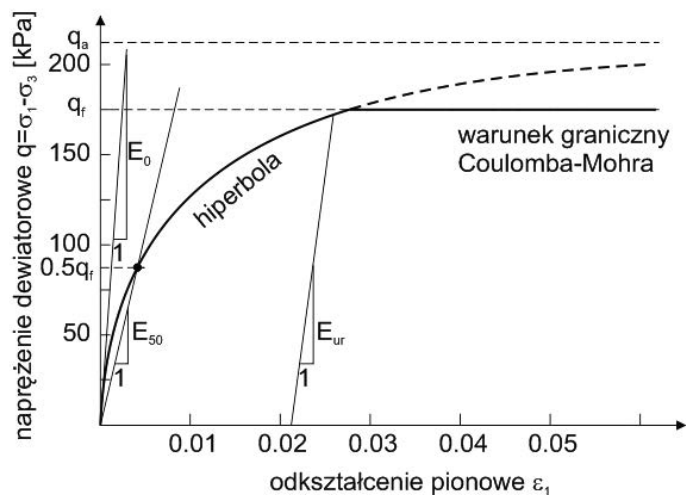
$$f_1 = \frac{q_a}{E_{50}} \frac{q}{q_a - q} - 2 \frac{q}{E_{ur}} - \gamma^{PS}, \quad \text{gdy } q < q_f \quad (6)$$

gdzie:

γ^{PS} – miara plastycznego odkształcenia postaciowego, stanowiąca parametr wzmocnienia.

Graniczne naprężenie dewiatorowe q_f i asymptotyczne naprężenie q_a są dane jako:

$$q_f = \frac{2 \sin \phi}{1 - \sin \phi} (\sigma_3 + c \operatorname{ctg} \phi) \quad q_a = \frac{q_f}{R_f} \quad (7)$$



Rys. 2. Hiperboliczna zależność ϵ_1 - q przy obciążeniu pierwotnym w trójosiowym ściskaniu

Warunek (7) zawiera dwa parametry wytrzymałościowe c i ϕ . Dla większości gruntów parametr R_f przyjmuje wartości z przedziału $0,75 \div 1,0$.

Domykającą część powierzchni plastyczności stanowi powierzchnia nasadkowa (*cap*):

$$f_2 = \frac{q^2}{M^2 r^2(\theta)} + p^2 + p_c^2 \quad (8)$$

W równaniu $r(\theta)$ jest parametrem definiującym kształt w przekroju dewiatorowym, zależnym od kąta Lodego θ , zaproponowany przez van Eekelena, M jest stałą materiałową powiązaną ze współczynnikiem parcia K_0^{NC} , p_c jest ciśnieniem prekonsolidacji na przecięciu nasadki z osią hydrostatyczną p . Zmiany naprężenia p_c opisuje się prawem wzmocnienia:

$$dp_c = -H \left(\frac{p_c + c \operatorname{ctg} \phi}{\sigma_{ref} + c \operatorname{ctg} \phi} \right)^m \quad (9)$$

gdzie:

H – parametr kontrolujący prędkość zmian plastycznego odkształcenia objętościowego zależny od modułu edometrycznego E_{oed} .

Funkcja potencjału plastycznego w mechanizmie dewiatorowym jest dana równaniem:

$$g_1 = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \psi_m \quad (10)$$

gdzie:

ψ_m – zmobilizowany kąt dyatacji uzależniony od kąta tarcia wewnętrznego w stanie krytycznym i zmobilizowanego kąta tarcia wewnętrznego.

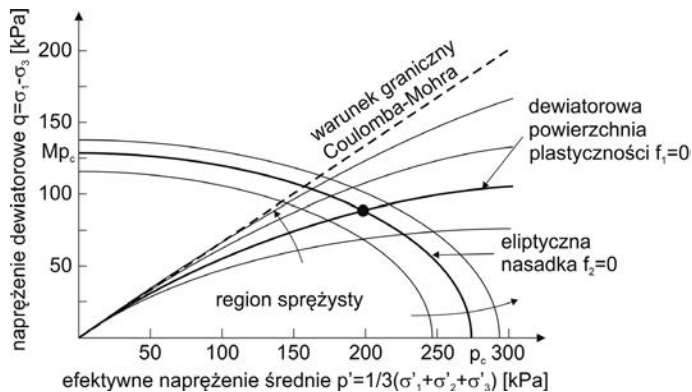
Na powierzchni nasadkowej założono stowarzyszone prawo płynięcia plastycznego. Powierzchnia plastyczności z wyróżnionymi częściami i kierunkami ewolucji podczas wzmocnienia jest pokazana na rys. 3. Dokładny opis modelu można znaleźć w [18, 22].

Model *Hardening Soil* może być zastosowany w analizie stabilności zgodnie z kryterium Hilla ze względu na fakt, że zakłada się wzmocnienie i niestowarzyszone prawo płynięcia w mechanizmie dewiatorowym uplastycznienia. Jak zauważają Gryczmański i Kliszczewicz w [10], mechanizm ten dominuje przy typowych ścieżkach naprężenia będących wynikiem rozciągania górniczego.

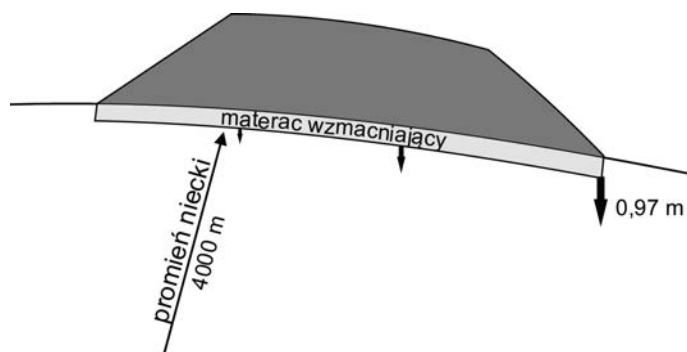
ANALIZA NUMERYCZNA NASYPU

Założenia do obliczeń

Na rys. 4. pokazano schemat zdeformowanego nasypu z zabezpieczoną podstawą. W przeprowadzonych obliczeniach założono, że zbrojenie w podstawie nasypu całkowicie przejmuje



Rys. 3. Powierzchnia plastyczności modelu Hardening Soil



Rys. 4. Nasyp na wypukłej części niecki górniczej

rozciągania zaistniałe w podłożu tak, że nie oddziałują one na nasyp. W modelu MES krzywiznę terenu górniczego zasymulowano przez wymuszenia kinematyczne stanowiące warunki brzegowe modelu. Rozważano samą bryłę nasypu, zakładając, że utrata stateczności może nastąpić jedynie w jego skarpach ze względu na sztywne i wytrzymałe podłoże nasypu.

Wartości przemieszczeń, charakterystyczne przy IV kategorii terenu, wyrażone promieniem krzywizny $R = 4000$ m, określono przy założeniu unieruchomienia lewej krawędzi podstawy nasypu. Jest to najbardziej niekorzystne położenie budowli ziemnej. Wartości wymuszonych przemieszczeń pionowych podstawy nasypu zawierały się w przedziale $0 \div 0,97$ m. Wymuszenia kinematyczne zrealizowano w 100 równych przyrostach.

Rozważano typowy przekrój wysokiego nasypu autostradowego o nachyleniu skarp 1:1,5, wysokości 16 m i szerokości korony 40 m. Obliczenia przeprowadzono w płaskim stanie odkształcenia, stosując do opisu materiału nasypu model *Hardening Soil* zaimplementowany do programu metody elementów skończonych *Z_Soil* [22].

W analizie przyjęto następujące wartości parametrów modelu:

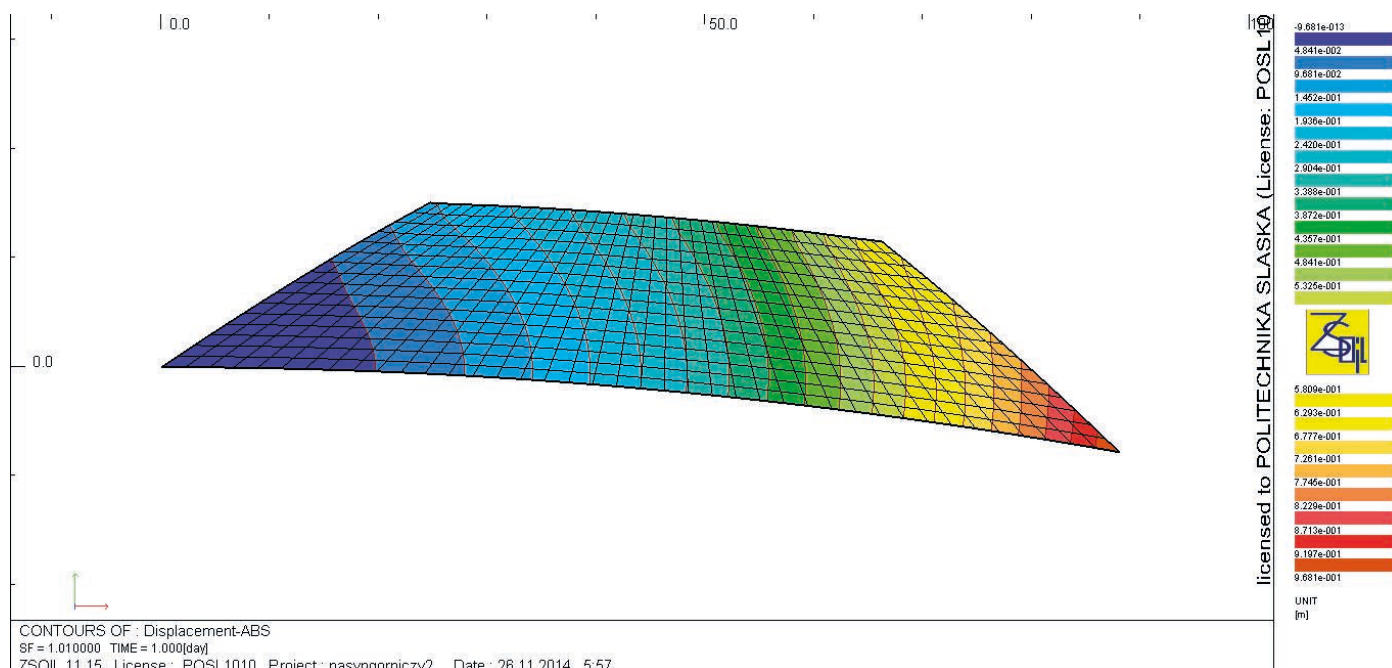
$$E_{ur}^{ref} = 225961 \text{ kPa}; \sigma^{ref} = 100 \text{ kPa}; \nu_{ur} = 0,17; m = 0,5; \sigma_L = 10 \text{ kPa}$$

$$E_{50}^{ref} = 75320 \text{ kPa}; c = 5 \text{ kPa}; \phi = 35^\circ; \psi = 0; \\ \gamma = 18,14 \text{ kN/m}^3; R_f = 0,9, f_t = 0$$

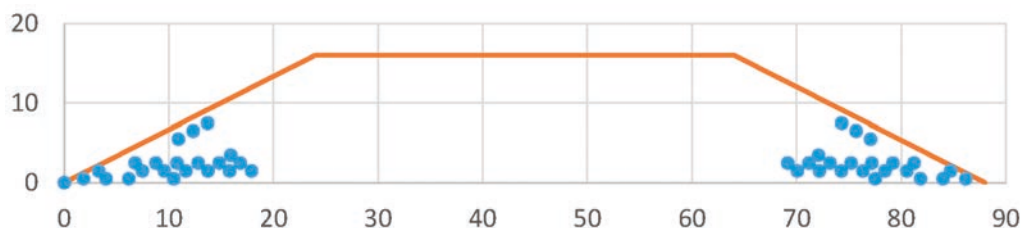
$$H = 171764 \text{ kPa}; M = 1,1129; K_0^{NC} = 0,5; OCR = 3$$

Wyniki obliczeń

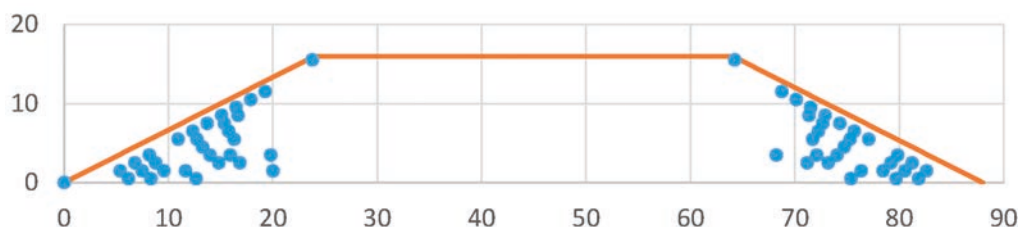
Model numeryczny nasypu wykorzystano do analizy zmian stanu naprężenia i odkształcenia w przekroju nasypu pod wpływem przemieszczeń charakterystycznych przy zakrzywieniu powierzchni terenu w pierwszej fazie przechodzenia pod obiek-



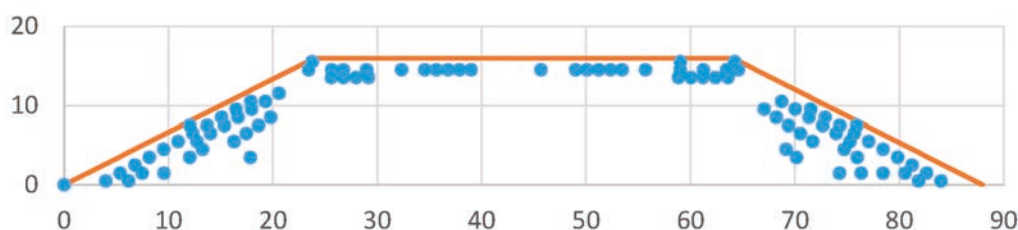
Rys. 5. Model nasypu po osiągnięciu maksymalnej deformacji



Rys. 6. Rozkład punktów niestatecznych $d^2W \leq 0$ w przyroście nr 10



Rys. 7. Rozkład punktów niestatecznych $d^2W \leq 0$ w przyroście nr 50



Rys. 8. Rozkład punktów niestatecznych $d^2W \leq 0$ w przyroście nr 100

tem niecki górniczej. Na rys. 5 pokazano zdeformowany model po osiągnięciu maksymalnych wartości wymuszonych przemieszczeń pionowych.

Wartości przyrostów naprężenia i odkształcenia wyliczono po każdym ze stu przyrostów przemieszczeń, na które podzielono maksymalne wartości wymuszeń kinematycznych. Na tej podstawie wyliczono wartość pracy drugiego rzędu we wszystkich punktach Gaussa na każdym etapie analizy. Wartości niedodatnie pracy drugiego rzędu zaznaczono na przekroju nasypu za pomocą arkusza kalkulacyjnego. Na rys. 6 ÷ 8 przedstawiono rozmieszczenie punktów świadczących o niestatecznej reakcji materiału nasypu na obciążenie.

Zwiększająca się krzywizna podstawy nasypu, skutkująca coraz większymi jej przemieszczeniami pionowymi, prowadzi do zwiększenia liczby punktów niestatecznych. W początkowej fazie deformacji nasypu punkty niestateczne lokują się u podstawy skarp. Bardziej zaawansowany proces deformacji powoduje ich powstawanie na całej wysokości skarpy, a następnie w obrębie korony.

PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Zaprezentowane wyniki w postaci punktów o niedodatniej wartości pracy drugiego rzędu stanowią ilustrację rozwoju stref zagrożenia niestatecznym zachowaniem materiału nasypu. Uzyskany rozkład punktów niestatecznych, zmieniający się wraz

ze stopniem zaawansowania deformacji nasypu, koresponduje z obserwowaną w rzeczywistości i opisaną w literaturze [7, 8] progresją awarii skarp nasypów. W pierwszej kolejności następuje ona u podnóża skarp, a następnie obejmuje całą wysokość skarpy, powodując powierzchniowe osuwanie się gruntów i ostatecznie tensyjne spękania w koronie.

Należy podkreślić, że zerowanie się wartości pracy drugiego rzędu występuje przed wyzerowaniem wyznacznika tensora akustycznego, co jest oznaką początku zniszczenia zlokalizowanego. Zatem, kryterium Hilla jest ograniczeniem dolnym warunków wystąpienia wszelkich form niestateczności prowadzących do zniszczenia. Niemniej, jest to kryterium lokalne i aby mieć pewność, że stateczność rozważanego obszaru (w tym przypadku – przekroju nasypu) pozostaje niezagrażona należy zbadać globalne kryterium. Globalne kryterium Hilla w odniesieniu do nasypu na podłożu górnym będzie przedmiotem analizy w najbliższej przyszłości.

LITERATURA

1. Bagińska I.: Wykorzystanie uogólnionej metody elementów kinematycznych do oceny stateczności zboczy. Zesz. Nauk. Pol. Śl., Z. 104, 2005, 51-58.
2. Bagińska I., Izicki R.: Optymalizacja geometrii bryły odłamu w uogólnionej metodzie elementów kinematycznych. Górnictwo i Geoinżynieria, 34 (2), 2010, 53-60.

3. Bigoni D., Hueckel T.: Uniqueness and localization - I. Associative and non-associative elastoplasticity. *Int. J. Solids and Structures*, 28(2), 1991, 197–213.
4. Bzówka J., Chmielnik S., Sternik K.: Wpływ oddziaływań górniczych na deformacje nasypu drogowego na podstawie analiz numerycznych. VI Międzynar. Konf. „Trwałe i bezpieczne nawierzchnie drogowe”, Kielce, 2000, 23-32.
5. Dembicki E.: Stany graniczne gruntów. Teoria i zastosowanie. Gdańskie Towarzystwo Naukowe, Acta Technica Gedanensia nr 7, Gdańsk 1970.
6. Daouadji A., Darve F., Al Gali H., Hicher P. Y., Laouafa F., Lignon S., Nicot F., Nova R., Pinheiro M., Prunier F., Sibille L., Wan R.: Diffuse failure in geomaterials: Experiments, theory and modelling. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 35(16), 2011, 1731-1773.
7. Duncan J. M., Dunlop P.: Slopes in stiff-fissured clays and shales. *ASCE, Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*, 95(2), 1969, 467-492.
8. Duncan J. M., Wright S. G.: *Soil Strength and Slope Stability*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, 2005.
9. Gryczmański M.: Wpływ eksploatacji górniczej na nasypy i ich zabezpieczenie. Autostrady na terenach górniczych, *Prace Nauk. GIG, Katowice*, 1998, 27-38.
10. Gryczmański M., Kliszczewicz B.: Przemieszczenia i naprężenia w nasypie poddanym wpływom eksploatacji górniczej. *Mat. XI Konf. Nauk. Met. Numer. w Proj. i Anal. Konstr. Hydrotech., Korbiewów*, 1999, 85-92.
11. Gryczmański M., Sternik K.: Awaria wysokiego nasypu autostrady A-4 między węzłami „Wirek” – „Batorego”. XXII Konf. Nauk.-Techn. Awary Budowlane, Szczecin-Międzyzdroje, 2005, 545-552.
12. Hill R.: General theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 6, 1958, 236-249.
13. Kwiatek J.: *Obiekty budowlane na terenach górniczych*. GIG, Katowice, 2007.
14. Nova R.: Controllability of the incremental response of soil specimens subjected to arbitrary loading programs. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, 5 (2), 1994, 193–201.
15. Pamin J.: Gradient-enhanced continuum models: formulations, discretization and applications. Monografia nr 301, Politechnika Krakowska, Kraków, 2004.
16. Rice J. R.: The localization of plastic deformation. In *Theoretical and Applied Mechanics. Fourteenth IUTAM Congress, Amsterdam, Koiter WT (ed.)*. 1976, 207–220.
17. Rudnicki J. W., Rice J. R.: Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 23, 1975, 371-394.
18. Schanz, T., Vermeer, P., Bonier, P.: Formulation and verification of the Hardening Soil model. In *Beyond 2000 in Computational Geotechnics*. Balkema, Rotterdam, 1999, 1-16.
19. Sternik K.: FEM analysis of road embankment on consolidating subsoil influenced by mining deformation. *Proc. 16th Int. Conf. Soil Mech. Geot. Engng, Osaka, Japan*, 2005, 1925-1928.
20. Stilger-Szydło E., Tutaj W., Effect of mining deformations on stability of transport embankments. *Studia Geotechnica et Mechanica*, No 3/4, 2004, 3-22.
21. Stilger-Szydło E.: Drogowe i autostradowe budowle ziemne – nośność i stateczność. *Geoinżynieria, drogi, mosty, tunele*, 01/2009 (20), 56-64.
22. Zimmermann, Th., Truty, A., Urbański, A., Podleś, K.: *Z_Soil.PC 2007 3D user manual*. Theory, tutorials and benchmarks, data preparation. Elmeppress International & Zace Services Ltd, Switzerland, 2007.