

Obliczanie ław fundamentowych o skończonej długości posadowionych na półprzestrzeni sprężystej według Gorbunowa – Posadowa

Mgr inż. Marcin Antczak

Politechnika Wrocławska, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego

Model półprzestrzeni sprężystej jest często stosowany przez projektantów do obliczeń sił wewnętrznych w ławach fundamentowych [6]. W Polsce funkcjonują nomogramy i tabele sporządzone przez Gorbunowa – Posadowa (książka z 1956 roku, wydanie polskie [4]). Podejście to nie doczekało się profesjonalnego oprogramowania ze względu na rozwój sprężysto-plastycznych modeli podłoża i ich zastosowanie w połączeniu z metodą elementów skończonych, a także rozwój programów komercyjnych w tej dziedzinie. Jednak ze względu na stosunkowo prosty sposób oznaczania parametrów, model półprzestrzeni sprężystej może być pomocnym narzędziem w pracy projektanta posadowień. Skomplikowane modele wymagają określenia kilku parametrów, które zazwyczaj nie wchodzą w zakres standardowych badań geotechnicznych. Wiele programów, między innymi *Robot Structural Analysis*, operuje jeszcze prostszym modelem, takim jak na przykład model Winklera. Z tego względu podjęto próbę stworzenia kodu komputerowego realizującego obliczenia w podejściu Gorbunowa – Posadowa dla belek o skończonej długości. Umożliwia on wyznaczenie sił wewnętrznych w ławie fundamentowej bez użycia tabel czy nomogramów. Podejście Gorbunowa – Posadowa dla belki o skończonej długości posadowionej na półprzestrzeni sprężystej polega na rozwinięciu funkcji oporu gruntu w szereg potęgowy.

TOK OBLICZENIOWY WEDŁUG GORBUNOWA – POSADOWA

Wyjściowy schemat belki posadowionej na półprzestrzeni sprężystej wraz z oznaczeniami przedstawiono na rys. 1.

Układ współrzędnych przyjęto w środku belki. Wszystkie przeprowadzane obliczenia odbywają się za pomocą współrzędnych bezwymiarowych, czyli:

$$x = \frac{x'}{a}, \quad y = \frac{y'}{b} \quad (1)$$

gdzie:

x, y – współrzędne bezwymiarowe,

x', y' – współrzędne rzeczywiste,

a, b – odpowiednio półdługość i półszerokość belki.

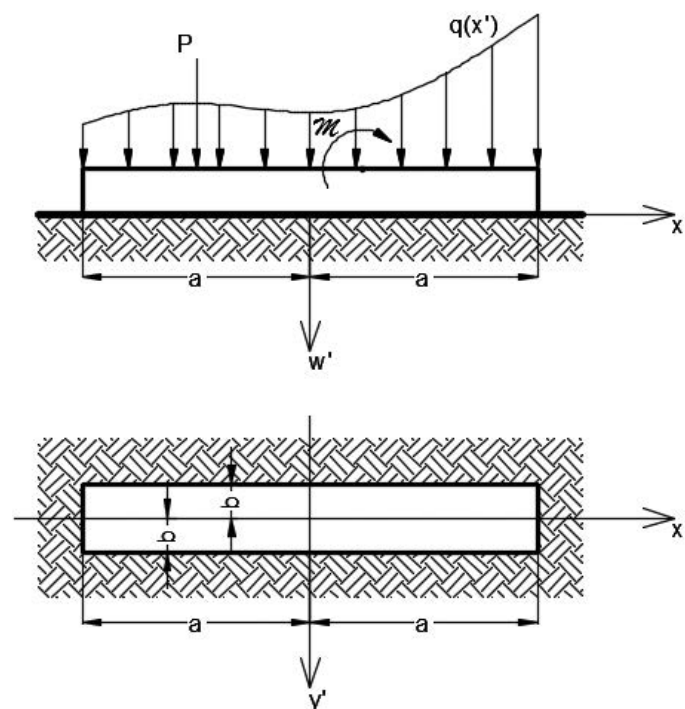
Nieznany rozkład oporu gruntu będzie poszukiwany w postaci podwójnego szeregu potęgowego (zakłada się odpowiednią regularność funkcji p):

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j \quad (2)$$

gdzie:

a_{ij} – nieznanne współczynniki oporu gruntu (współczynniki szeregu).

W przypadku belek, których długość jest dużo większa od szerokości (w odróżnieniu od płyt), można założyć, że belka na kierunku poprzecznym jest nieskończenie sztywna, czyli nie doznaje przemieszczenia. W związku z tym, dla takiego przypadku opór gruntu na kierunku poprzecznym można wyrazić za po-



Rys. 1. Schemat belki przyjątej do obliczeń (widok z boku i z góry), P – siła skupiona, M – moment skupiony, $q(x')$ – obciążenie rozłożone

mocą wzoru Sadowskiego [4], który dla obciążenia równomierne rozłożonego q ma następującą postać:

$$p(y) = \frac{2q}{\pi\sqrt{1-y^2}} \quad (4)$$

Dodatkowo, całkując odpór gruntu (2) względem współrzędnej y , otrzymujemy funkcję zależną jedynie od x .

$$p(x) = b \int_{-1}^1 p(x, y) dy \quad (4)$$

Powyższe założenie pozwala na przejście z szeregu podwójnego (2) do szeregu pojedynczego wyrażającego odpór gruntu przypadający na bieżącą jednostkę długości belki:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad (5)$$

Nieznane współczynniki a_i w szeregu (5) ustala się na podstawie następujących warunków:

- 1) Tożsamość przemieszczenia gruntu $w(x)$ i belki $Y(x)$:

$$w(x) = Y(x) \quad (6)$$

- 2) Dwa równania równowagi:

- a) Sił:

$$a \int_{-1}^1 p(x) dx = P_0 \quad (7)$$

- b) Momentów:

$$a^2 \int_{-1}^1 xp(x) dx = M_0 \quad (8)$$

gdzie:

P_0 i M_0 – odpowiednio całkowite obciążenie zewnętrzne i całkowity moment zewnętrzny w środku belki.

Wyprowadzenie wzorów wiążących współczynniki odporu gruntu z równaniami równowagi (7) i (8) uzyskuje się poprzez podstawienie wzoru na odpór gruntu (5), który dodatkowo podzielono na część parzystą i nieparzystą:

$$p(x) = [p_0(x)] + [p_1(x)] = \sum_{i=0}^n a_{2i} x^{2i} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{2i+1} x^{2i+1} \quad (9)$$

W ten sposób otrzymuje się dwa niezależne układy równań. Jeden dotyczący współczynników parzystych, a drugi dotyczący współczynników nieparzystych. Z podziału odporu gruntu na dwie części uzyskujemy duże korzyści. Na przykład, gdy obciążenie będzie symetryczne względem środka belki, wystarczy rozwiązać układy równań dotyczące wyrazów parzystych. Dodatkowo można zauważyć, że we wzorze (9) granica szeregu zmieniła się z ∞ na n , czyli rozwiązanie, które otrzymuje się jest przybliżone. Według autora metody, optymalnym wielomianem opisującym odpór gruntu jest wielomian 10 stopnia, ponieważ podczas rozwiązywania zadania pojawiają się funkcje, których nie można przedstawić w postaci wielomianu i takie funkcje przybliżane są metodą najmniejszych kwadratów. Natomiast jak wiadomo, wielomian aproksymujący daną funkcję w sensie najmniejszych kwadratów powinien mieć stopień na tyle wysoki, aby dostatecznie przybliżyć aproksymowaną funkcję, a jednocześnie stopień ten powinien być wystarczająco niski. Przy wysokim stopniu wielomianu występuje złe uwarunkowanie macierzy współczynników. W późniejszej części artykułu pokazano meto-

dę przybliżania na przykładzie funkcji (21), a także zamieszczono rys. 3 oraz tabl. 1 ilustrującą dokładność przybliżenia.

Podstawiając wzór (9) do równania (7) i (8) po prostym całkowaniu otrzymamy następujące zależności:

$$\sum_{i=0}^n \frac{a_{2i}}{2i+1} = \frac{P_0}{2a} \quad (10)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{2i+1}}{2i+3} = \frac{M_0}{2a^2} \quad (11)$$

Pozostałe równania uzyskuje się, korzystając z tożsamości przemieszczeń gruntu i belki (6). Lewa i prawa strona równania muszą być przedstawione za pomocą szeregów potęgowych, aby móc przyrównywać współczynniki przy tych samych potęgach. Zatem osiadanie gruntu określa następujący wzór:

$$w(x) = \sum_{u=0}^m A_u x^u \quad (12)$$

Natomiast przemieszczenia belki określa się wzorem:

$$Y(x) = \sum_{u=0}^m B_u x^u \quad (13)$$

Najtrudniejszą częścią zadania jest uzależnienie współczynników odporu gruntu z lewą stroną równania (6), czyli z przemieszczeniami gruntu $w(x)$ [3]. Ławę fundamentową rozwiązuje się jako zadanie przestrzenne, gdzie równaniem wyjściowym jest wzór Boussinesqa.

$$w(r) = \frac{P(1-\mu_0^2)}{\pi E_0 r} \quad (14)$$

gdzie:

E_0 – moduł ściśliwości gruntu,

μ_0 – współczynnik Poissona,

r – odległość między obciążonym punktem i punktem, dla którego wyznacza się przesunięcie $w(r)$,

P – siła skupiona.

Nacisk jaki przekazuje ława fundamentowa na grunt można rozpatrywać jako nieskończoną liczbę sił skupionych P . W związku z tym, siła P równa się obciążeniu $p(\bar{x}, \bar{y})$ przypadającemu na element powierzchni podstawy $ab dx dy$. Powyższe założenie pozwala zapisać wzór (14) w następującej postaci:

$$w(x, y) = \frac{(1-\mu_0^2) \cdot a \cdot b}{E_0} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m a_{ij} \bar{x}^i \bar{y}^j d\bar{x} d\bar{y}}{\sqrt{a^2 \cdot (\bar{x}-x)^2 + b^2 \cdot (\bar{y}-y)^2}} \quad (15)$$

gdzie:

$\bar{x}, \bar{y}$ – bezwymiarowe współrzędne zaczepienia siły P ,

$d\bar{x} d\bar{y}$ – bezwymiarowy element powierzchni podstawy belki, na który przypada obciążenie równe sile P ,

Sprowadzenie równania (15) do postaci równania (12) wiąże się z dużą ilością obliczeń, które pominięto w tym artykule. Obliczenia te zamieszczone są w pracy [2] i [3]. Ostatecznie współczynniki A_u we wzorze (12) przybierają następującą postać:

$$A_{2u} = \frac{2(1-\mu_0^2)}{\pi E_0} \cdot \left\{ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq u}}^n \frac{a_{2i}}{2i-2u} + [\ln(4\alpha) - d_{2u}] \cdot a_{2u} \right\} \quad (16)$$

$$A_{2u+1} = \frac{2(1-\mu_0^2)}{\pi E_0} \cdot \left\{ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq u}}^{n-1} \frac{a_{2i+1}}{2i-2u} + [\ln(4\alpha) - d_{2u+1}] \cdot a_{2u+1} \right\}$$

gdzie:

α – stosunek półdługość do półszerokości belki:

$$\alpha = \frac{a}{b} \quad (17)$$

Natomiast wyrazy d_{2u} i d_{2u+1} określają odpowiednio wzory (38) i (39).

Do rozwiązania pozostaje prawa strona równania (6), czyli uzależnienie współczynników szeregu opisującego odpór gruntu z przemieszczeniem ławy fundamentowej.

Równanie ugięcia belki będzie wyrażone za pomocą metody parametrów początkowych, które w tym przypadku znajdują się w środku belki (rys. 2).

Równanie różniczkowe osi odkształconej belki we współrzędnych bezwymiarowych prezentuje się następująco:

$$\frac{E_1 \cdot I}{a^4} Y^{IV}(x) = q(x) - p(x) \quad (18)$$

gdzie:

E_1 – moduł sprężystości betonu,

I – główny centralny moment bezwładności przekroju.

Powyższe równanie można rozpatrywać dla różnych rodzajów obciążeń $q(x)$. Kiedy obciążenie zewnętrzne jest siłą skupioną P w odległości $\Delta = \delta \cdot a$ na prawo od środka belki, czyli δ jest z przedziału $(0,1)$. W takim przypadku funkcję $q(x)$ można przedstawić za pomocą dystrybucji „delta” Diraca:

$$q(x) = \frac{P}{a} \cdot D(x - \delta) \quad (19)$$

Wtedy rozwiązanie równania (18), po wyrażeniu stałych całkowania przez parametry początkowe, prezentuje się następująco:

$$Y(x) = \frac{-a^4}{E_1 I} \cdot \left\{ \frac{-P}{6a} \cdot (x - \delta)^3 \cdot H(x - \delta) + \frac{Q_0}{6a} \cdot x^3 + \frac{M_0}{2a^2} \cdot x^2 + \right. \\ \left. - \frac{E_1 I}{a^3} \cdot \tan \varphi_0 \cdot x + \sum_{i=0}^{2u} \left[\frac{a_{2i}}{(2i+1)(2i+2)(2i+3)(2i+4)} \cdot x^{2i+4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a_{2i+1}}{(2i+2)(2i+3)(2i+4)(2i+5)} \cdot x^{2i+5} \right] \right\} + Y_0 \quad (20)$$

gdzie:

Y_0 – ugięcie w środku belki,

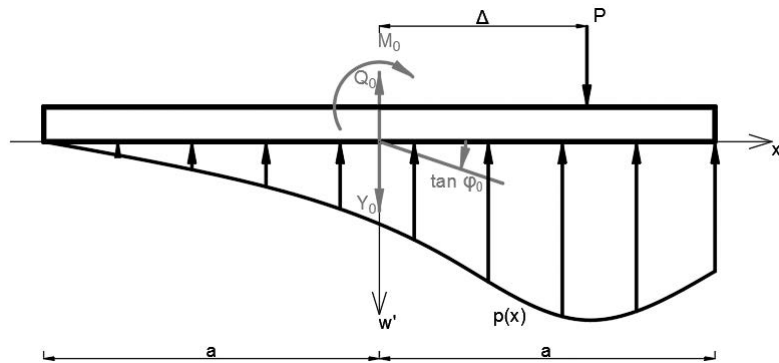
$\tan \varphi_0$ – tangens kąta pochylenia stycznej do osi odkształconej w środku belki,

M_0 – moment zginający w środku belki,

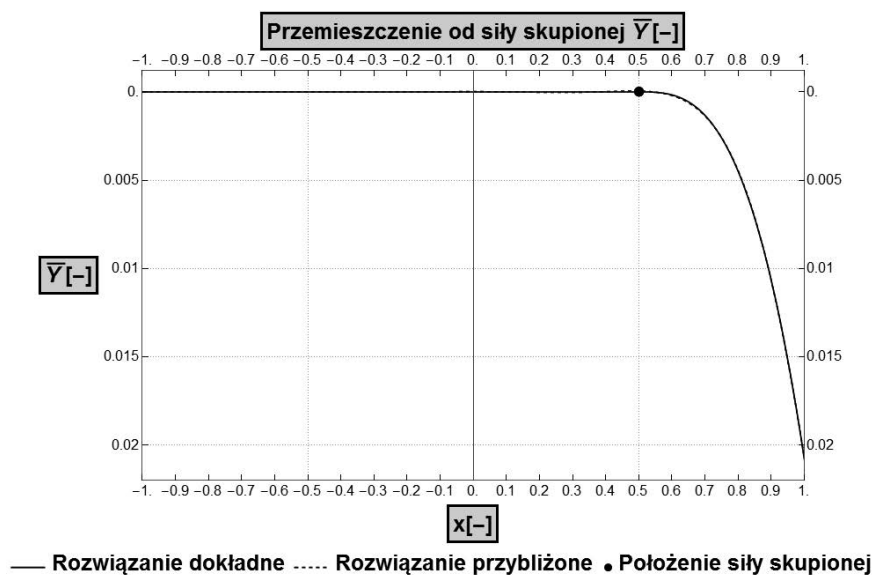
Q_0 – siła poprzeczna w środku belki.

Jak widać we wzorze (20) występuje człon z funkcją Heaviside’a:

$$\phi(x) = \frac{P}{6a} \cdot (x - \delta)^3 \cdot H(x - \delta) \quad (21)$$



Rys. 2. Siły działające na belkę wraz z naniesionymi parametrami początkowymi



Rys. 3. Funkcja dokładna (21) i przybliżona, gdy $\delta = 0,5$

Tabl. 1. Porównanie wartości funkcji dokładnej i przybliżonej dla $\delta = 0,5$

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\phi(x) \cdot 10^{-6}$	0	0	0	0	0	0	167	1333	4500	10667	20833
$\psi(x) \cdot 10^{-6}$	-17	-4	21	26	-18	-51	203	1366	4456	10682	20714

Powyższa funkcja nie jest wielomianem, a musi być przedstawiona w taki sposób, aby była możliwość porównywania współczynników przy tych samych potęgach w równaniu (6). Stosując metodę najmniejszych kwadratów, funkcję $\phi(x)$ ze wzoru (22) przybliżono wielomianem $\psi(x)$ stopnia $\bar{m}$.

$$\frac{d}{d\bar{u}} \left\{ \int_{-1}^{\delta} \sum_{j=0}^{\bar{m}} (r_j x^j - 0)^2 dx + \int_{\delta}^1 \sum_{j=0}^{\bar{m}} \left[r_j x^j - \frac{P}{6a} \cdot (x - \delta)^3 \right]^2 dx \right\} = 0 \quad (22)$$

$$\bar{u} = 0, 1, 2, \dots, \bar{m}$$

W ten sposób uzyskuje się ciągłą funkcję na całej długości belki.

$$\phi(x) \approx \psi(x) = \sum_{j=0}^{\bar{m}} r_j x^j \quad (23)$$

Przedstawiono wykres obrazujący funkcję dokładną (21), gdy $\delta = 0,5$ i funkcję przybliżoną w postaci wielomianu 10 stopnia.

Na rys. 3 widać, że praktycznie nie ma różnicy między dwoma funkcjami, a wartości funkcji w poszczególnych punktach przedstawiono w tabl. 1.

Stosując metodę najmniejszych kwadratów, uzyskuje się bardzo dobre przybliżenie funkcji $\phi(x)$.

Należy wyznaczyć jeszcze parametry początkowe we wzorze (20), a następnie porównać funkcję przemieszczenia gruntu i belki, które według założeń są sobie równe. Wszystkie ostateczne równania pokazano w dalszej części i zapisano za pomocą macierzy.

OPIS PROGRAMU

Program autorski stworzono w środowisku Mathematica, gdzie jego najważniejszą częścią jest rozwiązanie dwóch głównych układów równań, w wyniku których otrzymujemy współczynniki wielomianu potęgowego stopnia $2n$, przybliżającego opór gruntu. Szereg potęgowy podzielono na dwie części: parzystą i nieparzystą. Dzięki temu można ułożyć dwa oddzielne układy równań:

– dla współczynników parzystych:

$$\mathbf{A}_{(n+1) \times (n+1)} \cdot \mathbf{X}_{(n+1) \times 1} = \mathbf{B}_{(n+1) \times 1} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} F_{0,0} & F_{0,1} & \dots & F_{0,n} \\ G_{1,0} & G_{1,1} & \dots & G_{1,n} \\ H_{2,0} + I_2 & H_{2,1} & \dots & H_{2,n} \\ H_{3,0} & H_{3,1} + I_3 & \dots & H_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n,0} & H_{n,1} & \dots & H_{n,n} + I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_6 \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_2 \\ S_4 \\ S_6 \\ \vdots \\ S_{2n} \end{bmatrix} \quad (25)$$

– dla współczynników nieparzystych:

$$\mathbf{A}'_{(n) \times (n)} \cdot \mathbf{X}'_{(n) \times 1} = \mathbf{B}'_{(n) \times 1} \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} F'_{0,0} & F'_{0,1} & \dots & F'_{0,n} \\ G'_{1,0} & G'_{1,1} & \dots & G'_{1,n} \\ H'_{2,0} + I'_2 & H'_{2,1} & \dots & H'_{2,n} \\ H'_{3,0} & H'_{3,1} + I'_3 & \dots & H'_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H'_{n,0} & H'_{n,1} & \dots & H'_{n,n} + I'_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \\ a_7 \\ \vdots \\ a_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_3 \\ S_5 \\ S_7 \\ \vdots \\ S_{2n+1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Na macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}'$ składają się odpowiednio wyrazy $F_{0,i}$ i $F'_{0,i}$, które wynikają z dwóch równań równowagi dla sił (7) i momentów (8).

$$F_{0,i} = \frac{1}{2i+1} \quad (28)$$

$$F'_{0,i} = \frac{1}{2i+3} \quad (29)$$

Natomiast wyrazy $G_{1,i}$, $G'_{1,i}$, $H_{u,i}$, $H'_{u,i}$, $I_{u,i}$, $I'_{u,i}$ określone są na podstawie tożsamości osiadań gruntu i przemieszczeń belki $w(x) = Y(x)$.

$$G_{1,i} = \begin{cases} \ln(4\alpha) - d_2 - t' \cdot \chi_2, & i = 1 \\ \frac{1}{2i-2} - t' \cdot \chi_{2i}, & i \neq 1 \end{cases} \quad (30)$$

$$G'_{1,i} = \begin{cases} \ln(4\alpha) - d_3 - t' \cdot \chi_3, & i = 1 \\ \frac{1}{2i-2} - t' \cdot \chi_{2i+1}, & i \neq 1 \end{cases} \quad (31)$$

$$H_{u,i} = \begin{cases} \ln(4\alpha) - d_{2u}, & i = u \\ \frac{1}{2i-2u}, & i \neq u \end{cases} \quad (32)$$

$$H'_{u,i} = \begin{cases} \ln(4\alpha) - d_{2u+1}, & i = u \\ \frac{1}{2i-2u}, & i \neq u \end{cases} \quad (33)$$

$$I_u = t' \cdot \lambda_{2u-4} \quad (34)$$

$$I'_u = t' \cdot \lambda_{2u-3} \quad (35)$$

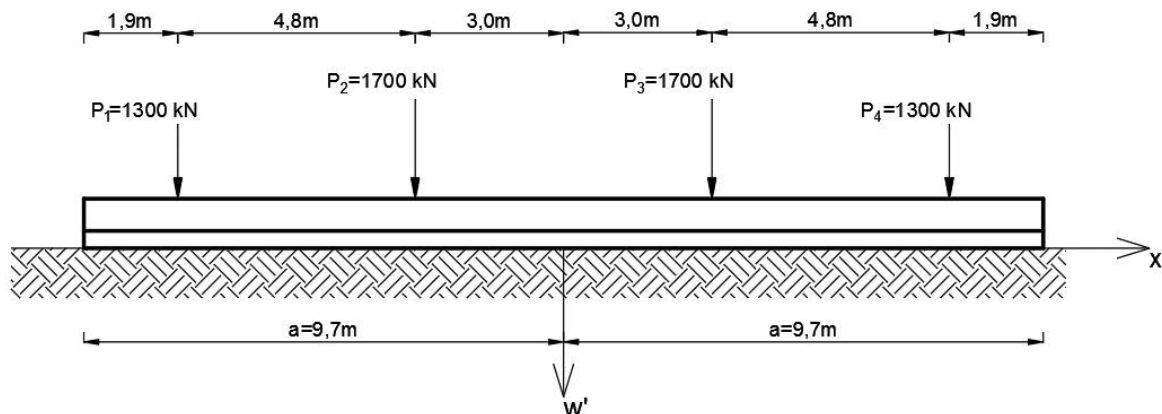
gdzie:

$$\chi_{2i} = \frac{1}{2(2i+1)(2i+2)} \quad (36)$$

$$\chi_{2i+1} = \frac{1}{6(2i+2)} \quad (37)$$

$$d_{2u} = \sum_{s=1}^{2u} \frac{1}{s} \quad (38)$$

$$d_{2u+1} = \sum_{s=1}^{2u+1} \frac{1}{s} \quad (39)$$



Rys. 4. Schemat zadania

$$\lambda_{2u-4} = \frac{1}{(2u-3)(2u-2)(2u-1)2u} \quad (40)$$

$$\lambda_{2u-3} = \frac{1}{(2u-2)(2u-1)2u(2u+1)} \quad (41)$$

Belkę o skończonej długości charakteryzują dwa parametry:

- wskaźnik wiotkości belki:

$$t = \frac{\pi E_0 \cdot b \cdot a^3}{2(1-\mu_0^2) \cdot E_I I} \quad (42)$$

- parametr α określony wzorem (17).

Bezwymiarowa wartość wskaźnika wiotkości belki określona jest jako:

$$t' = t \cdot \alpha \quad (43)$$

Macierze **A** i **A'** zależą wyłącznie od właściwości gruntu oraz od wymiarów i właściwości materiału, z którego wykonano ławę fundamentową. Natomiast macierz wyrazów wolnych **B** i **B'** zależy od obciążenia zewnętrznego znajdującego się na belce. Przykładowo, macierz wyrazów wolnych, dla najprostszego obciążenia, jakim jest obciążenie równomiernie rozłożone na całej długości belki, wygląda następująco:

$$S_0 = q, S_2 = \frac{t' \cdot q}{4}, S_4 = \frac{t' \cdot q}{24}, \text{ pozostałe } S_i = 0 \quad (44)$$

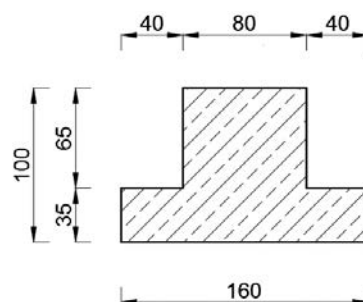
W programie jest możliwość zadania następujących rodzajów obciążeń:

- obciążenie rozłożone na dowolnym odcinku z dowolnymi wartościami na końcach obciążanego odcinka,
- obciążenie w postaci siły skupionej przyłożonej w dowolnym punkcie fundamentu,
- obciążenie w postaci momentu skupionego przyłożonego w dowolnym punkcie fundamentu.

Szczegółowy opis programu wraz z kodem źródłowym znajduje się w [1].

PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

W przedstawionym przykładzie obliczeniowym porównano rozwiązanie uzyskane na podstawie wyprowadzonych układów równań dla belki o skończonej długości z wynikami uzyskanymi na podstawie nomogramów. Przykład zaczerpnięto z książki



Rys. 5. Przekrój teowy ławy fundamentowej

ki: „Fundamentowanie: Przewodnik do projektowania Tom II” (Praca zbiorowa pod redakcją Włodzimierza Brząkały) [5]. Na podstawie nomogramów można uzyskać wartości sił wewnętrznych w przyjętych punktach, natomiast na podstawie równań (25) i (27) otrzymujemy współczynniki wielomianu. Zatem, aby móc porównywać oba rozwiązania, wykorzystując wartości uzyskane za pomocą nomogramów, dopasowano funkcję w postaci wielomianu, który uzyskano na podstawie metody najmniejszych kwadratów.

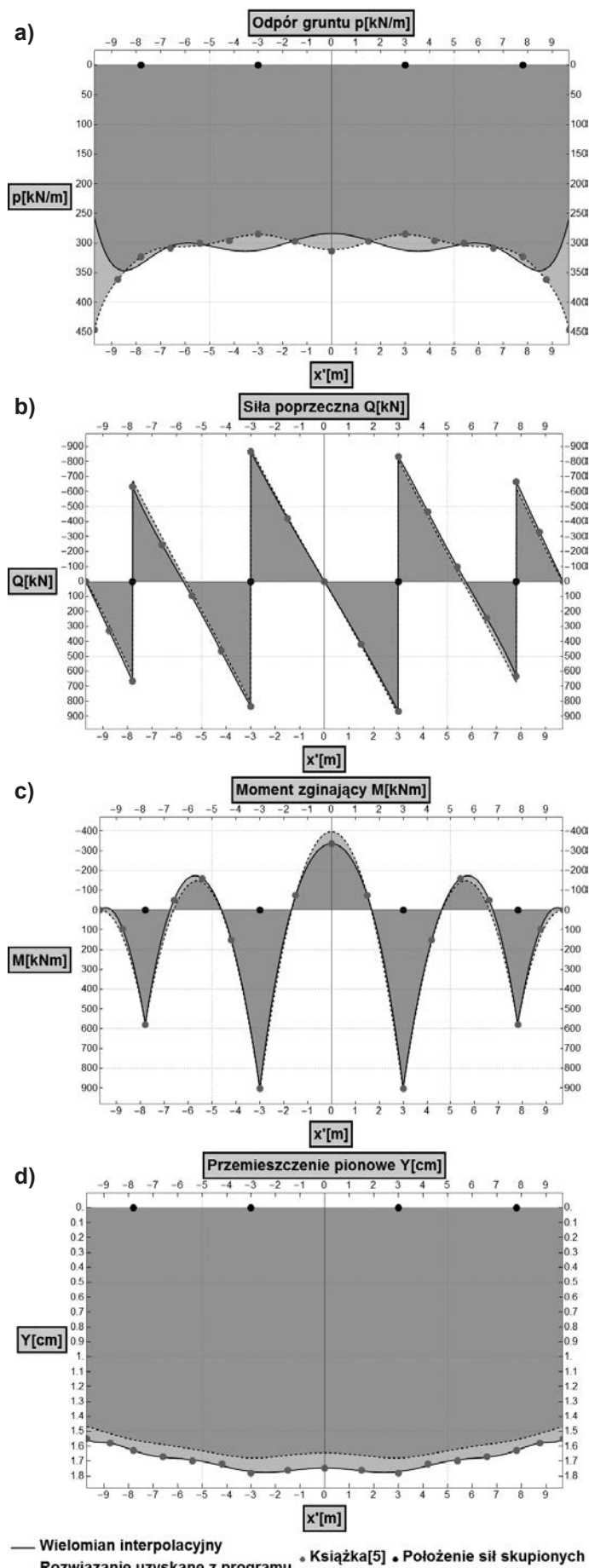
Przykład dotyczy ławy szeregowej pod rzędem czterech słupów, których rozstaw, geometrię i obciążenie zewnętrzne przedstawiono na rys. 4 i 5.

Podłoże jest uwarstwione o parametrach sprężystych:

- zastępczy moduł ściśliwości gruntu: $E_0^* = 41,0$ MPa,
- współczynnik Poissona gruntu: $\mu_0 = 0,29$.

Ponadto założono wartość modułu Younga betonu (materiału fundamentu) $E_I = 27,0$ GPa. Na podstawie przedstawionych informacji można obliczyć wskaźnik wiotkości belki $t = 21,73$ oraz stosunek półdługości i półszerokości podstawy belki $\alpha = 12,13$. Posiadamy więc wszystkie informacje potrzebne do stworzenia równań. Z rys. 4 wynika, że zadanie jest symetryczne względem środka belki. Wystarczy zatem rozwiązać układ równań dotyczący współczynników parzystych.

Wyniki rozwiązań przedstawiono na rys. 6. W odporze gruntu największe różnice są na końcu belki. Rozwiązanie wykorzystane w programie spełnia warunek równowagi sił dla skończonej długości belki, więc jeśli obciążenie na belce wynosi 6000 kN, to po scałkowaniu odporu gruntu otrzymamy również wartość równą 6000 kN. Natomiast, jak widać na rys. 6, pole odporu gruntu z przykładu zawartego w książce [5] jest większe

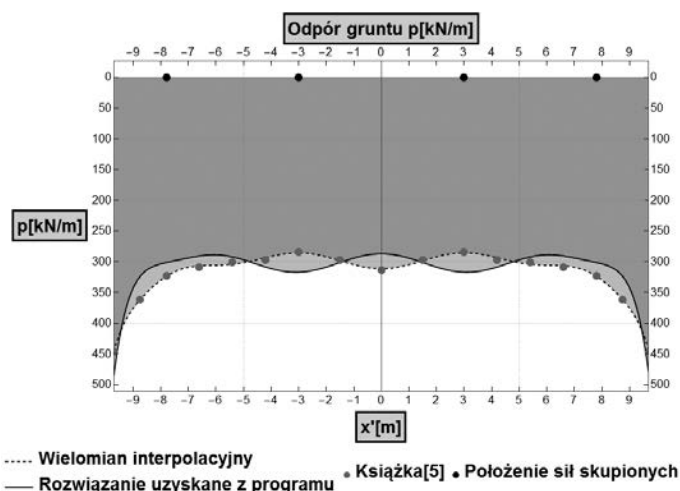


Rys. 6. Różnice obu rozwiązań w wykresach: a) odporu gruntu, b) sił poprzecznych, c) momentów zginających, d) przemieszczeń belki

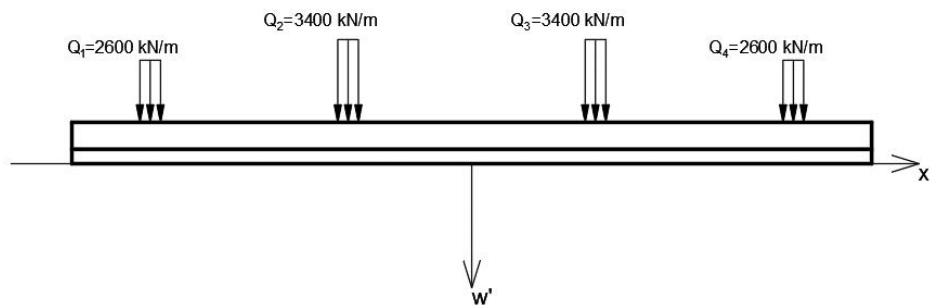
i wynosi około 6100 kN. Jest to bardzo mały procent w stosunku do całego obciążenia znajdującego się na belce, a niedokładność ta spowodowana jest tym, że nomogramy stworzono dla dwóch rodzajów belek: obustronnie nieskończenie długiej i jednostronnie nieskończenie długiej. Dlatego też takie wykresy wymagają korekty dla belek o skończonej długości. Mimo różnic w odporze gruntu, nie ma to dużego wpływu na wykresy sił poprzecznych, bo największa różnica występuje w miejscu przyłożenia siły na odległości 7,8 m i wynosi 40 kN. Większą różnicę można zauważyć w momentach zginających na środku belki – wynosi ona około 60 kNm, natomiast w odległości 5,4 m różnica wynosi 20 kNm. Pod siłami jest zgodność wartości momentów zginających, a różnice w przemieszczeniach są równomierne i sięgają kilku milimetrów.

Należy wspomnieć, że odpór gruntu w rozwiązaniu z programu komputerowego przybliżono wielomianem 10 stopnia. Można rozważyć zwiększenie stopnia wielomianu, co według teorii powinno dać dokładniejszy wynik. Należy mieć jednak na uwadze efekt nadmiernego dopasowania, na przykład funkcji analizowanej na rys. 3 i w tabl. 1, gdzie widać, że przy wielomianie 10 stopnia otrzymujemy bardzo dokładne przybliżenie funkcji. W programie jest możliwość zadania stopnia wielomianu przybliżającego odpór gruntu. Przykładowo zestawiono rozwiązanie z książki [5] z odporem gruntu opisanym wielomianem 12 stopnia.

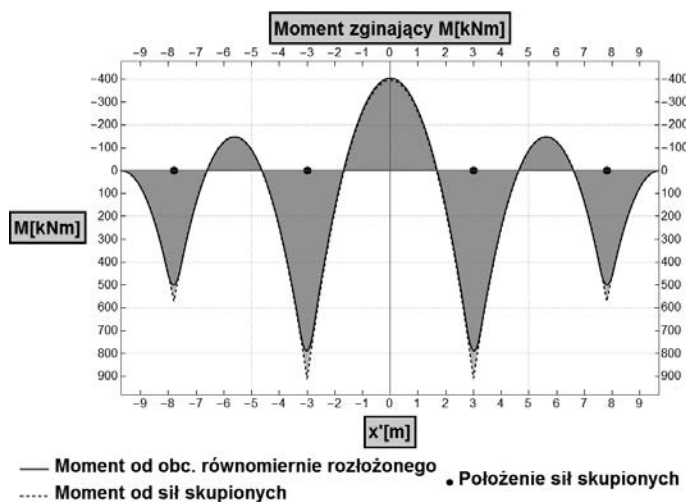
Dużym atutem programu jest możliwość zadania obciążenia rozłożonego na dowolnym odcinku, co nie jest możliwe z wykorzystaniem nomogramów Grobunowa – Posadowa, które są sporządzone dla sił skupionych. Można oczywiście próbować ustawić wielu sił, lecz jest to bardzo żmudna praca. Tak samo z momentem skupionym – za pomocą nomogramów można zastąpić moment parą sił rozstawioną na małym odcinku. Natomiast w programie łatwo można zadać różne rodzaje obciążeń. Przy wykorzystaniu nomogramów obciążenia przekazywane przez słup przyjmuje się jako siłę skupioną, natomiast wykorzystując program, można rozważyć obciążenie równomiernie rozłożone na szerokości słupa. Na rys. 9 przedstawiono różnice wynikające z przyjęcia obciążenia przekazywanego przez słup jako siły skupionej i obciążenia równomiernie rozłożonego. Wygląd wykresu momentów zginających łatwo przewidzieć, natomiast



Rys. 7. Odpór gruntu (wielomian 12 stopnia)



Rys. 8. Słupy jako obciążenie równomiernie rozłożone



Rys. 9. Moment zginający
(porównanie obciążenia równomiernie rozłożonego i siły skupionej)

różnice w wartościach wynikające z przyjęcia różnych rodzajów obciążeń już trudniej.

Największe różnice, jak można było przewidzieć, występują w miejscu położenia sił. Dochodzą one nawet do 100 kNm.

PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono program komputerowy opierający się na obliczeniach przeprowadzonych w latach czterdziestych przez Gorbunowa – Posadowa, który umożliwia sprawne obliczanie sił wewnętrznych w ławie fundamentowej. Otrzymano najważniejsze wykresy, na podstawie których można odpowiednio zazbroić belkę. Modelem gruntu jest półprzestrzeń sprężysta,

która daje dokładniejsze wyniki niż model Winklera, nadal stosowany powszechnie w komercyjnych programach. Z drugiej strony bardziej zaawansowane modele podłoża, takie jak na przykład *Hardening soil* [7], wymagają określenia wielu parametrów na podstawie kosztownych badań. Natomiast półprzestrzeń sprężysta określona jest przez moduł ścisłości gruntu i współczynnik Poissona gruntu, czyli przez parametry fizyczne, w przeciwieństwie do modelu Winklera, w którym występuje współczynnik podatności podłoża.

LITERATURA

1. Antczak M.: Analiza momentów zginających oraz sił tnących w ławach fundamentowych posadowionych na półprzestrzeni sprężystej. Praca magisterska, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 2016.
2. Gorbunow-Posadow M. I.: Balki i plity na uprugom osnovanii. Mashstroizdat, Moskwa, 1949.
3. Gorbunow-Posadow M. I.: Deformacji powierzchni gruntu od działania lubo nagruzki, napriewno raspredielennoj po priamougolnoj ploszczadkie. Sbornik trudow, nr 11, NII Ministriestwa stroitelstwa predpriyatij maszynostrojenja. Osnowanija i fundamienty, Moskwa, 1948.
4. Gorbunow-Posadow M. I.: Obliczanie konstrukcji na podłożu sprężystym. Budownictwo i Architektura, Warszawa, 1956.
5. Praca zbiorowa pod redakcją Włodzimierza Brząkały, Fundamentowanie: Przewodnik do projektowania. Tom II. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1990.
6. Selvadurai A. P. S.: Elastic analysis of soil-structure interaction, Elsevier, Amsterdam, 1979.
7. Truty A., Obrzud R.: The Hardening Soil Model – practical guidebook. Zace Services Ltd, Software engineering, Lausanne 2011.