

Obciążenia hydrodynamiczne rurociągów instalowanych w strefie brzegowej morza

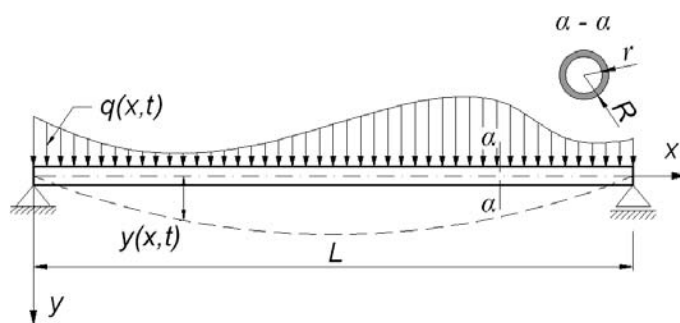
Prof. dr hab. inż. Kazimierz Szmidt, dr inż. Benedykt Hedzielski
Instytut Budownictwa Wodnego PAN w Gdańsku

Rurociągi instalowane w morzu służą głównie do transportu surowców energetycznych (ropa, gaz) i jako takie układane są na dnie morskim lub w nim zagłębiane. Istnieją również rurociągi z końcówkami dyfuzyjnymi, służące do odprowadzenia oczyszczonych ścieków do obszaru morza. Te ostatnie montowane są na konstrukcjach wsporczych na pewnej wysokości ponad dnem akwenu, co ma zapewnić lepsze mieszanie ścieków z wodą morską. Obciążenia rurociągów dyfuzyjnych instalowanych w strefie brzegowej morza wynikają z oddziaływań wewnętrznych, wywołanych przepływem i wyrzutem ścieków oraz oddziaływań zewnętrznych związanych z przepływem wody morskiej w otoczeniu rurociągu. W dalszym ciągu rozważania ograniczymy głównie do oddziaływań zewnętrznych. Ze względu na charakter obciążeń zewnętrznych, zmiennych w czasie, w opisie pracy rurociągu podstawowe znaczenie mają równania dynamiki, w których uwzględnia się siły masowe związane z przyspieszeniem zarówno masy samego rurociągu, jak też masy transportowanej cieczy oraz tzw. masy dołączonej cieczy. W analizie pracy typowych rurociągów korzystamy z metod mechaniki budowli właściwych dla konstrukcji o małych przemieszczeniach, dla których jest uzasadnione stosowanie metody superpozycji. Zagadnienia dynamiki rurociągów dyskutowane są w wielu pozycjach literatury dotyczącej konstrukcji morskich. Dla naszych celów ograniczymy się tylko do pewnych prac, bezpośrednio związanych z poruszaną tu problematyką. Podstawy projektowania podmorskich rurociągów zawiera obszerna praca Magdy [5], w której dyskutowane są zarówno zagadnienia techniczne budowy takich rurociągów, jak również zagadnienia technologiczne, związane z transportem ropy i gazu. Szczegółowa problematyka dynamiki rurociągów odprowadzających ścieki do strefy brzegowej morza włącznie z obciążeniami dyfuzorów jest dyskutowana w książce Sawickiego i in. [14]. W tej ostatniej pracy znaleźć można wiele informacji dotyczących wpływu środowiska morskiego na pracę rurociągu zamontowanego po-

nad dnem akwenu na szeregu sprężystych podporach. Zamieszczone w tej pracy rozwiązania szczegółowe dotyczą istniejących rurociągów, zainstalowanych w rejonie Zatoki Gdańskiej. Podstawową, w dyskutowanych tutaj zagadnieniach, jest praca zbiorowa Massela i in. [7], w której opisano metody wyznaczania obciążeń konstrukcji inżynierskich instalowanych w strefie brzegowej morza. W pracy tej znajdują się informacje dotyczące środowiska morskiego niezbędne w projektowaniu konstrukcji hydrotechnicznych, w tym konstrukcji rurociągów. W dalszym ciągu, w dyskusji szczegółowych problemów będziemy odwoływać się do pozycji literatury właściwych dla poruszanych zagadnień.

RÓWNANIE DRGAŃ POPRZECZNYCH POJEDYNCZEGO PRZESŁA RUROCIĄGU

W dyskutowanych tutaj zagadnieniach celowe jest rozważenie, w pierwszej kolejności, dynamiki najprostszego przypadku – pojedynczego przesła rurociągu. Przesło to potraktujemy jako belkę wolnopodpartą przedstawioną schematycznie na rys. 1.



Rys. 1. Pojedyncze przesło rurociągu

Równanie małych drgań poprzecznych rurociągu transportującego ciecz znaleźć można w pracy Blevinsa [3], w której przedstawiono również analizę drgań własnych takiej konstrukcji. Poniżej przytoczymy wyprowadzenie takiego równania, którego zasadnicze elementy oparto o rozwiązanie zamieszczone w cytowanej pracy. Przyjmując rurę o przekroju kołowym, równanie drgań poprzecznych można zapisać w postaci:

$$M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q(x, t) \quad (1)$$

gdzie:

$M = m_r + m$ – suma masy rury i masy cieczy (nieruchomej względem rury) na jednostkę długości rurociągu,

EJ – sztywność rury na zginanie,

$q(x, t)$ – obciążenie zewnętrzne na jednostkę długości rurociągu.

W dyskutowanym przypadku rurociągu, uwzględnimy wpływ ruchu cieczy wewnątrz rury na wartość tej masy, przy czym, w celu uproszczenia rozwiązania, założymy za cytowaną pracę, że mamy do czynienia ze stałą prędkością przepływu, a więc $u = u(x, t) = \text{const}$. W celu obliczenia pionowego przyspieszenia masy cieczy wewnątrz poziomej, sprężystej rury uwzględnimy składową konwekcyjną. Pionową prędkość i przyspieszenie elementu cieczy opisują równania:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial t} + u \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Z podstawienia powyższych związków do równania (1) otrzymuje się:

$$(m_r + m) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2mu \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + mu^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q(x, t) \quad (3)$$

Zapisane równanie dotyczy drgań rurociągu w powietrzu i jako takie jest wyprowadzone w pracy Blevinsa [3]. Dla rurociągu zanurzonego w cieczy należy do tego równania dodać człony masy dołączonej i tłumienia wynikające z obecności cieczy na zewnątrz rury. Te ostatnie parametry wynikają z obciążeń hydrodynamicznych generowanych przez ruch rury w otaczającej ją cieczy. W celu ich wyznaczenia rozważa się poniżej zagadnienie pomocnicze małych drgań sztywnego walca w nieograniczonym obszarze cieczy.

ZAGADNIENIE PŁASKIE MAŁYCH DRGAŃ WALCA W NIEOGRANICZONYM OBSZARZE CIECZY ŚCIŚLIWEJ

W celu wyznaczenia oddziaływań cieczy zewnętrznej na drgania rurociągu, rozważa się zagadnienie pomocnicze małych drgań walca kołowego w nieograniczonym obszarze cieczy ściśliwej. W przyjętym modelu jest to ruch sztywnego przekroju kołowego w nieograniczonej płaszczyźnie cieczy ściśliwej. Przy założonym potencjalnym ruchu nielepkiej cieczy ściśliwej zagadnienie sprowadza się do znalezienia rozwiązania równania falowego potencjału prędkości (potencjału akustycznego [6]), spełniającego narzucone pole prędkości na pobocznicy walca. Korzystając ze zmiennych biegunowych (r, ξ) , równanie falowe dla potencjału prędkości zapisuje się w postaci:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

gdzie:

c – prędkość dźwięku w cieczy.

Przy założonym ustalonym ruchu harmonicznym walca rozwiązanie tego równania można zapisać w następującej postaci [8]:

$$\phi(r, \xi, t) = CH_1^{(1)}(kr) \sin \xi \exp(-i\omega t) \quad (5)$$

gdzie:

ω – częstość kołowa tego ruchu,

$k = \omega / c$

W równaniu tym, $H_1^{(1)} = J_1 + Y_1$ jest funkcją Hankela pierwszego rodzaju rzędu pierwszego (J_1 i Y_1 są funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu pierwszego), natomiast C jest stałą rozwiązania. Dla pionowego ruchu walca opisanego za pomocą równania:

$$w(t) = w_0 \exp(-i\omega t) \quad (6)$$

gdzie:

w_0 – amplituda tego ruchu,

wyznacza się prędkości normalne na jego pobocznicy i na tej podstawie określa się wartość stałej C w równaniu (5) (składowa normalna prędkości cieczy musi być równa prędkości normalnej walca). Rozwiązanie dyskutowanego zadania przyjmuje postać:

$$\phi(r, \xi, t) = \frac{-icw_0}{H_0^{(1)}(\gamma) - H_1^{(1)}(\gamma)/\gamma} \exp(-i\omega t) H_1^{(1)}(kr) \sin \xi \quad (7)$$

gdzie:

$$\gamma = \frac{\omega a}{c}$$

a – promień zewnętrzny walca.

Na podstawie tego rozwiązania wyznacza się ciśnienie cieczy na pobocznicy walca i w efekcie wypadkową tego ciśnienia działającego na przekrój kołowy sztywnego walca. Szczegóły wyprowadzeń można znaleźć w literaturze przedmiotu [6, 15]. Wypadkową ciśnienia zapisuje się w postaci:

$$W = \rho \pi a^2 \left[F_M(\gamma) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F_T(\gamma) \omega \frac{\partial w}{\partial t} \right] \quad (8)$$

gdzie:

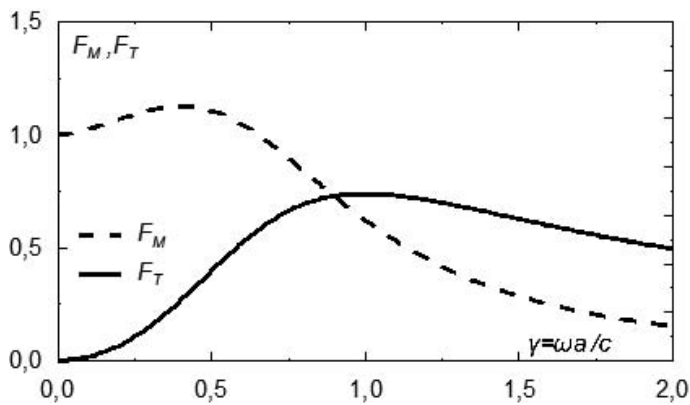
ρ – gęstość cieczy,

$$\begin{aligned} F_M(\gamma) &= \frac{J_1(J_1 - \gamma J_0) + Y_1(Y_1 - \gamma Y_0)}{(J_1 - \gamma J_0)^2 + (Y_1 - \gamma Y_0)^2} \\ F_T(\gamma) &= \frac{Y_1(J_1 - \gamma J_0) - J_1(Y_1 - \gamma Y_0)}{(J_1 - \gamma J_0)^2 + (Y_1 - \gamma Y_0)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

Występujące w ostatnich równaniach funkcje J_0 , J_1 oraz Y_0 i Y_1 są funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu zerowego i pierwszego. Obliczone, na podstawie wzorów (9), wykresy składowych F_M (masy dołączonej) oraz F_T (tłumienia drgań) przedstawiono na rys. 2.

W dyskutowanym przypadku drgań rurociągu, najważniejsze są najniższe częstości, odpowiadające małemu parametrowi γ . Dlatego też, dla $\gamma \ll 1$, można przyjąć, że:

$$F_M(\gamma \ll 1) \cong F_M(\gamma = 0) \cong 1, \quad F_T(\gamma \ll 1) \cong 0 \quad (10)$$



Rys. 2. Współczynniki masy dołączonej – F_M i tłumienia drgań walca – F_T

Przyjęcie ostatnich przybliżeń oznacza, że dla małych częstotliwości drgań zakłada się stałą masę dołączoną, niezależną od częstotliwości, zaniedbując przy tym tłumienie drgań, które jest pomijalnie małe. Z drugiej strony, przyjęcie $F_M = 1$ i $F_T = 0$ odpowiada pominięciu ściśliwości cieczy ($c \rightarrow \infty$). Stąd, w dalszym ciągu zakłada się, że ciecz jest nieściśliwa. Należy dodać, że dyskutowane rozwiązanie dotyczy cieczy nielepkiej i ruchu potencjalnego. W warunkach rzeczywistych należy spodziewać się większego tłumienia wynikającego głównie z lepkości cieczy oraz jej ruchu – w ogólności turbulentnego. Tym niemniej, do analizy podstawowych częstotliwości drgań rurowości, przyjęcie ostatnich zależności i wzorów wydaje się uzasadnione. Korzystając z tego ostatniego wyniku, w miejsce masy ($m_r + m$) w równaniu (3) przyjmuje się masę:

$$M = m_r + \rho A + \rho A^* \cong m_r + 2\rho A = m_r + 2m \quad (11)$$

gdzie:

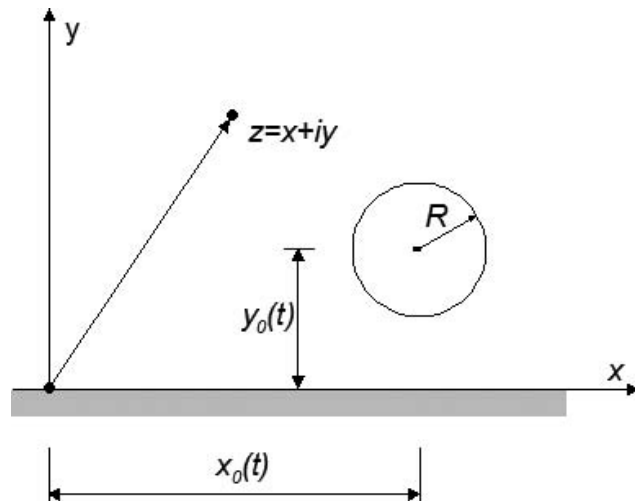
A^* – pole przekroju poprzecznego rurowości obliczone dla zewnętrznej średnicy tego rurowości (A oznacza pole przekroju wewnętrznej).

Jeżeli pominiemy małe różnice średnicy wewnętrznej i zewnętrznej rurowości oraz założymy, że gęstość transportowanej cieczy równa jest gęstości wody morskiej, wówczas w przybliżeniu, dla rurowości posadowionej pod wodą, masa dołączona cieczy równa jest podwojonej masie cieczy transportowanej przez rurowość. W przypadku istotnych różnic gęstości cieczy transportowanej i gęstości wody morskiej lub też dużych różnic średnic zewnętrznej i wewnętrznej rurowości należy skorygować przyjęte założenie.

WPŁYW DNA AKWENU NA OBCIĄŻENIA HYDRODYNAMICZNE WALCA

Przedstawione wyniki dotyczą przypadku nieograniczonej płaszczyzny cieczy. W warunkach rzeczywistych mamy do czynienia z obszarem cieczy ograniczonym dnem akwenu oraz powierzchnią swobodną cieczy. Ze względu na zanikanie pola prędkości cieczy z odległością mierzona od osi rurowości celowe jest rozważenie przypadku półpłaszczyzny cieczy z kołowym walcem zainstalowanym w pobliżu dna obszaru cieczy. Schemat analizowanego układu przedstawiono na rys. 3.

W płaskim zagadnieniu nieograniczonej cieczy nieściśliwej i walca kołowego rozwiązanie podstawowe można zbudować za pomocą potencjału zespolonego, odpowiadającego potencjałowi



Rys. 3. Schemat walca zamocowanego ponad dnem akwenu

dipola (źródło i upust o jednakowej intensywności [9]). Dla walca umieszczonego ponad dnem, poruszającym się z prędkością $U = (\dot{x}_0, \dot{y}_0)$, poszukiwany potencjał zespolony można wyrazić w postaci sumy zbioru dipoli o odpowiednich wagach (szczegóły tego rozwiązania można znaleźć w pracach [4, 10, 16, 17, 19])

$$w(z) = -R^2 \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \left[\frac{\dot{x}_0(t) + i\dot{y}_0(t)}{z - z_0 + iRq_j} + \frac{\dot{x}_0(t) - i\dot{y}_0(t)}{z - z_0 + i(2y_0(t) - Rq_j)} \right] \quad (12)$$

gdzie:

R – promień walca,

$z_0 = x_0(t) + iy_0(t)$ określa położenie walca,

$z = x + iy$ oznacza dowolny punkt zespolonej półpłaszczyzny,

q_j oraz μ_j wyznacza się z warunku brzegowego na powierzchni walca. Współczynniki te opisane są wzorami:

$$q_0 = 0, \quad q_j = \frac{1}{(2y_0/R) - q_{j-1}} \\ \mu_0 = 1, \quad \mu_j = \mu_{j-1} q_j^2, \quad j = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Siły hydrodynamiczne działające na walec wyznacza się z wzoru Blasiusa [9]:

$$F_x - iF_y = -i\rho\oint \frac{\partial\varphi}{\partial t} d\bar{z} + \frac{1}{2}i\rho\oint \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 dz \quad (14)$$

Dla walca poruszającego się prostopadle do sztywnego dna $y = 0$, całkowanie (14) daje w wyniku [19]:

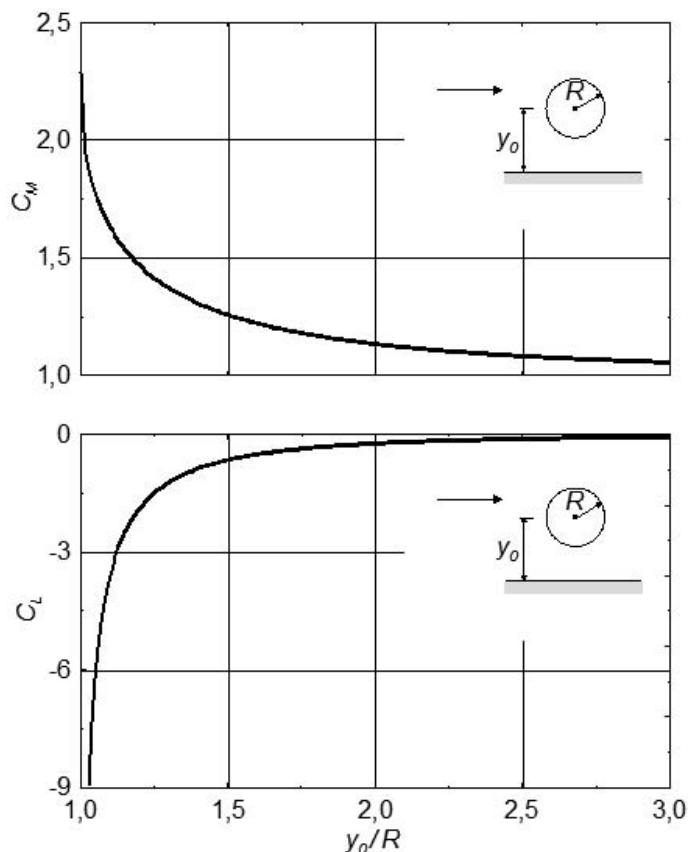
$$F_x = 0 \\ F_y = -\rho\pi R^2 C_M \ddot{y}_0 + \rho R C_L (\dot{y}_0)^2 \quad (15)$$

gdzie:

$$C_M = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 \\ C_L = -4\pi \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_j \mu_k}{2[y_0/R - q_j - q_k]^3}, \quad y_0 > R \quad (16)$$

są odpowiednio: współczynnikiem masy dołączonej oraz współczynnikiem siły nośnej [7, 19].

Przy ruchu walca w kierunku równoległym do sztywnego dna ($y = 0$), w miejsce składowych (15) obowiązują następujące wzory składowe wypadkowej siły hydrodynamicznej:



Rys. 4. Wykresy współczynników C_M i C_L w funkcji odległości walca od sztywnego dna

$$\begin{aligned} F_x &= -\rho\pi R^2 C_M \ddot{x}_0 \\ F_y &= \rho R C_L (\dot{x}_0)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Jak widać, w przypadku ruchu poziomego, otrzymuje się dodatkową składową pionową siły wynikającą z obecności sztywnego dna ($y = 0$). W równaniach (15) i (17) w obu składowych ruchu obowiązują te same współczynniki masy dołączonej i siły nośnej. Należy podkreślić, że wyprowadzone wzory dotyczą ruchu sztywnego walca kołowego w półpłaszczyźnie cieczy, bez obecności zewnętrznego potencjału pola przepływu cieczy. Ze względu na to, że pole prędkości cieczy wywołane ruchem walca zanika w kierunku normalnej do dna (w kierunku osi y), dla cieczy o głębokości znacznie przekraczającej średnicę walca, można wykorzystać przedstawione wcześniej rozwiązania dla przypadku pasma cieczy (uzasadnione jest wówczas założenie, że powierzchnia swobodna cieczy nie „czuje” ruchu walca). Na podstawie przytoczonych tu rozwiązań, zaczerpniętych z literatury przedmiotu, wykonano obliczenia współczynników C_M i C_L , których wykresy zamieszczono na rys. 4. Jak widać, w obliczeniu sił działających na walec, wpływ dna jest istotny w przypadkach, gdy odległość osi walca od dna akwenu jest mniejsza od jego dwóch średnic.

DRGANIA WŁASNE POJEDYNCZEGO PRZĘŚLA RUROCIĄGU

W nawiązaniu do istniejących rurociągów zainstalowanych w Zatoce Gdańskiej, w których odległość od dna akwenu jest

większa od dwóch średnic rurociągu, w obliczeniu siły hydrodynamicznej pominiemy obecność dna. W celu rozwiązania zagadnienia drgań własnych belki wolnopodparłej, wykorzystamy równanie (3), w którym pominiemy obciążenie zewnętrzne (prawą stronę tego równania). Należy dodać, że klasyczne zagadnienie drgań własnych dotyczy przypadków, w których nie istnieje tłumienie drgań i w których rozdzielanie zmiennych przestrzennych i czasu prowadzi do zbioru częstości drgań i odpowiadających tym częstościom postaci drgań. W przypadku istnienia tłumienia drgań analizowanego układu, nie mamy rozwiązania o sztywnych postaciach drgań (postacie te są tłumione w czasie), a częstości drgań odpowiadają częstościom wymuszenia, dla których otrzymuje się ekstremalne przemieszczenia układu. W zapisanym równaniu drgań poprzecznych rurociągu mamy człon o mieszanych pochodnych ($\partial^2 y / \partial x \partial t$) w równaniu (3)), który ma charakter tłumienia i dlatego mówiąc o drganiach własnych, będziemy rozumieć poszukiwanie takiego rozwiązania, w którym jest możliwe rozdzielanie zmiennych w równaniu ruchu. Dlatego też w dalszym ciągu będziemy poszukiwać rozwiązania równania (3) w postaci:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{i\omega t} \quad (18)$$

gdzie:

ω – w ogólności zespolona częstość drgań,

A_n – stałe tego rozwiązania.

Jak widać, nieznaną postać drgań założono w postaci szeregu Fouriera względem funkcji $\sin(n\pi x/L)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$ spełniających warunki brzegowe ugięcia belki dla $x = 0$ i $x = L$.

Podstawienie szeregu (18) do jednorodnego (z pominięciem prawej strony) równania (3) daje:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \left[-M\omega^2 - m \left(\frac{un\pi}{L} \right)^2 + EJ \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \right] \sin \frac{n\pi x}{L} + \right. \\ \left. + 2mi\omega \left(\frac{un\pi}{L} \right) \cos \frac{n\pi x}{L} \right\} e^{i\omega t} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie:

M – sumaryczna masa na jednostkę długości rurociągu opisana wzorem (11).

Równanie to obowiązuje dla dowolnego czasu t i dlatego możemy w opisie pominąć ostatni mnożnik. W miejsce ostatniego wyrażenia zapisuje się:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\alpha_n \sin \frac{n\pi x}{L} + 2mi\omega \left(\frac{un\pi}{L} \right) \cos \frac{n\pi x}{L} \right] = 0 \quad (20)$$

gdzie:

$$\alpha_n = -M\omega^2 - m \left(\frac{un\pi}{L} \right)^2 + EJ \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

W dalszym ciągu, w miejsce funkcji $\cos \frac{n\pi x}{L}$ wykorzystamy jej rozwinięcie:

$$\cos \frac{n\pi x}{L} = \sum_{r=1}^{\infty} b_{nr} \sin \frac{r\pi x}{L} \quad (22)$$

Mnożąc ostatnie równanie przez $\sin \frac{r\pi x}{L}$ i całkując w przedziale $(0 - L)$, wyznacza się stałe:

$$b_{nr} = \frac{2r}{\pi} \frac{1}{r^2 - n^2} [1 - (-1)^{r+n}], \quad r, n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Z otrzymanego wzoru wynika, że współczynniki rozwinięcia b_{nr} są różne od zera tylko w przypadku, gdy $(r+n)$ jest liczbą nieparzystą, a więc dla n będącego liczbą parzystą i r – liczbą nieparzystą, lub odwrotnie, tj. dla n nieparzystego i r parzystego. W miejsce ostatniego wzoru możemy zapisać równanie dla niezerowych wartości b_{nr} w postaci:

$$b_{nr} = \frac{4r}{\pi} \frac{1}{r^2 - n^2}, \quad \begin{cases} n=1,3,5,\dots & \text{ i } r=2,4,6,\dots \text{ lub} \\ n=2,4,6,\dots & \text{ i } r=1,3,5,\dots \end{cases} \quad (24)$$

Po podstawieniu wartości (24) i (22) do podstawowego równania (20), otrzymuje się:

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} A_n \left[\alpha_n \sin \frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sum_{r=2,4,6,\dots} \frac{r}{r^2 - n^2} \sin \frac{r\pi x}{L} \right] + \sum_{n=2,4,6,\dots} A_n \left[\alpha_n \sin \frac{n\pi x}{L} + \beta_n \sum_{r=1,3,5,\dots} \frac{r}{r^2 - n^2} \sin \frac{r\pi x}{L} \right] = 0 \quad (25)$$

gdzie:

$$\beta_n = 8im\omega \left(\frac{un}{L} \right) = n\beta^*, \quad n=1,2,3,\dots \quad (26)$$

Mnożąc równanie (25) przez $\sin \frac{n\pi x}{L}$, kolejno dla n nieparzystego i parzystego, i całkując w przedziale $(0-L)$, otrzymuje się dwa układy równań:

$$\begin{aligned} A_r \alpha_r + \beta^* \sum_{n=2,4,6,\dots} A_n \frac{nr}{r^2 - n^2} &= 0, \quad r=1,3,5,\dots \\ A_n \alpha_n + \beta^* \sum_{r=1,3,5,\dots} A_r \frac{nr}{r^2 - n^2} &= 0, \quad n=2,4,6,\dots \end{aligned} \quad (27)$$

Uzyskane wzory wyprowadzono przy założonej zmienności w dziedzinie czasu w postaci $\exp(i\omega t)$. Biorąc pod uwagę zespolone wartości A_n w równaniu (18), można rozwiązanie to zapisać w zmiennych rzeczywistych, w których w miejsce zespolonego członu czasowego zapisze się kombinację funkcji trygonometrycznych $\sin(\omega t)$ i $\cos(\omega t)$. Z równania (3) wynika, że człon o mieszanych pochodnych w tym równaniu, tj. $\partial^2 y / \partial x \partial t$, prowadzi do rozbitcia układu końcowych równań problemu na odpowiadające nieparzystym i parzystym funkcjom rozwinięcia. Z tego względu w rozwiązaniu w zmiennych rzeczywistych uzasadnione jest przyjęcie odpowiednio np. funkcji $\sin(\omega t)$ dla nieparzystych funkcji rozwinięcia i funkcji $\cos(\omega t)$ dla parzystych funkcji rozwinięcia. Zatem, w nawiązaniu do postaci równania (3) i układów równań (27), w miejsce zapisu (18) można przyjąć rozwiązanie w zmiennych rzeczywistych:

$$y(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \omega t + \sum_{n=2,4,6,\dots} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \omega t \quad (28)$$

i w efekcie otrzymać dwa układy rzeczywistych równań do wyznaczenia częstości drgań podstawowych [3].

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań układu równań (27) jest zerowanie się jego wyznacznika. W dalszym ciągu, w celu uproszczenia dyskusji, ograniczymy rozważania tylko do dwóch pierwszych równań tego układu, w których wyznacznik przyjmuje postać:

$$\Delta = \alpha_1 \alpha_2 + \left(\frac{2}{3} \beta^* \right)^2 = 0 \quad (29)$$

gdzie, w celu skrócenia zapisu, wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -M\omega^2 + \gamma_1 \\ \alpha_2 &= -M\omega^2 + \gamma_2 \end{aligned} \quad (30)$$

oraz

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= EJ \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 - m \left(\frac{u\pi}{L} \right)^2 \\ \gamma_2 &= 16EJ \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 - 4m \left(\frac{u\pi}{L} \right)^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Z podstawienia (30) i (31) do równania (29) otrzymuje się równanie kwadratowe przy częstości ω^2 :

$$M^2 \omega^4 - \left[M(\gamma_1 + \gamma_2) + \left(\frac{2}{3} \eta \right)^2 \right] \omega^2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \quad (32)$$

gdzie:

$$\eta = 8m \frac{u}{L}.$$

Rozwiązanie tego równania daje w wyniku podstawowe częstości drgań belki. Należy zaznaczyć, że ze względu na człon o mieszanych pochodnych w równaniu (3), podstawowe częstości oznaczają tutaj wartości ω odnoszące się do postaci drgań opisanej szeregiem Fouriera, a nie, jak w klasycznym zagadnieniu bez tłumienia drgań, dotyczące kolejnych składowych $\sin(n\pi x/L)$. Ograniczenie rozważań do dwóch równań jest tylko pewnym przybliżeniem założonej postaci drgań, wyrażonej za pomocą szeregu Fouriera. Wyznacznik równania (32) przyjmuje postać:

$$\Delta = M^2 (\gamma_1 - \gamma_2)^2 + \left(\frac{2}{3} \eta \right)^4 + 2M(\gamma_1 + \gamma_2) \left(\frac{2}{3} \eta \right)^2 \quad (33)$$

Jak widać, dla $(\gamma_1 + \gamma_2) > 0$, wyznacznik $\Delta > 0$.

W dalszym ciągu, wygodnie jest wprowadzić do opisu dwa parametry. Pierwszym z nich jest podstawowa (najniższa) częstość drgań własnych belki ω_N w przypadku braku przepływu cieczy w rurze, a więc dla $u = 0$. W takim przypadku, z wzoru (32) otrzymuje się:

$$\omega_N^2 = \frac{EJ}{M} \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \quad (34)$$

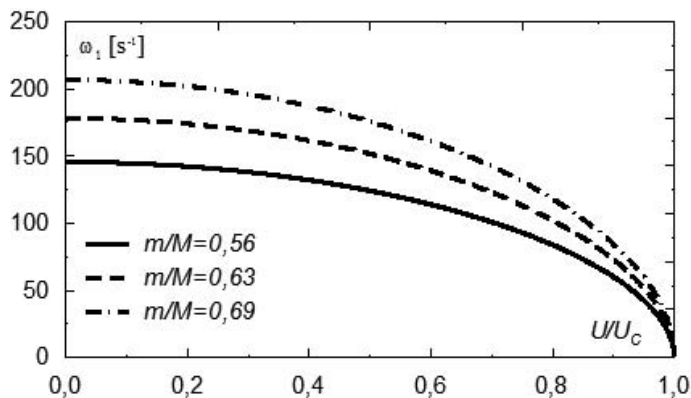
Drugi parametr dotyczy założonej prędkości $u = \text{const.}$ przepływu cieczy w rurze. Do dyskutowanej tu belki wolnopodpartej, można wprowadzić tzw. krytyczną prędkość przepływu, w której siła normalna na końcu wypływu cieczy jest równa sile krytycznej Eulera, przy której może nastąpić wyboczenie belki. Proste przekształcenia dają w wyniku krytyczną prędkość przepływu:

$$U_c^2 = \frac{EJ}{m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \quad (35)$$

Korzystając z wprowadzonych oznaczeń, zapisuje się warunek dotyczący $(\gamma_1 + \gamma_2)$ w następującej postaci:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 17m \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 U_c^2 \left[1 - \frac{5}{17} \left(\frac{u}{U_c} \right)^2 \right] > 0 \quad (36)$$

Przy prędkości przepływu mniejszej od prędkości krytycznej, równanie (32) ma dwa rzeczywiste pierwiastki ω^2 . Do ich wyznaczenia pożyteczne jest wykorzystanie zapisu w zmien-



Rys. 5. Podstawowa częstość w funkcji prędkości przepływu cieczy w rurze

nych bezwymiarowych. Dla $\Delta > 0$ pierwiastki tego równania można zapisać w postaci:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_N}\right)^2 = W \pm \sqrt{W^2 - 4 \left[1 - \left(\frac{u}{U_c}\right)^2\right] \left[4 - \left(\frac{u}{U_c}\right)^2\right]} \quad (37)$$

gdzie:

$$W = \frac{17}{2} + \left(\frac{u}{U_c}\right)^2 \left[\frac{128}{9\pi^2} \frac{m}{M} - \frac{5}{2}\right] \quad (38)$$

Przy małych wartościach $m/M \ll 1$ można pominąć ten człon w ostatnim równaniu i w miejscu (37) skorzystać z prostszego wyrażenia [3]:

$$\omega_1 \cong \omega_N \sqrt{1 - (u/U_c)^2} \quad (39)$$

W celu zobrazowania rozwiązania (37) na rys. 5 przedstawiono wykresy podstawowej częstości ω_1 dla wybranych wartości (m/M) w funkcji parametru (U/U_c).

Z przedstawionej dyskusji i otrzymanych rozwiązań wynika, że w praktycznych przypadkach, do sztywnych rurowciągów uzasadnione jest pominięcie w ich dynamicznej analizie prędkości przepływu cieczy wewnątrz rurowciągu i w miejsce równania (3) korzystanie z prostszego wyrażenia:

$$M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q(x, t) \quad (40)$$

gdzie, zgodnie z wzorem (11), $M = m_r + 2m$.

OBciążENIA HYDRODYNAMICZNE RUROCIĄGU WYWOŁANE FALOWANIEM MORZA

Przedstawiona w poprzednich punktach dyskusja dotyczyła drgań własnych rurowciągu w nieruchomym obszarze cieczy. W celu zbadania pracy rurowciągu zainstalowanego w strefie przydennej morza należy określić obciążenie zewnętrzne $q(x, t)$ rurowciągu wywołane falowaniem grawitacyjnym. W nawiązaniu do fizyki zagadnienia, mamy tutaj do czynienia z bardzo złożonym zagadnieniem, w którym obecność rurowciągu zakłóca pole przepływu wywołane falowaniem. W ogólnym przypadku, to pole przepływu jest polem losowym, w którym mamy zbiór fal wodnych o losowych wysokościach i losowych kierunkach. Dodatkowo, w otoczeniu rurowciągu występują zjawiska generacji wirów i ich oderwania, dla których założenie o ciągłości ośrodka traci rację bytu. Dlatego też, w celu wyznaczenia obciążeń hydrodynamicznych rurowciągów uciekamy się do budowy pewnych uproszczonych modeli opisu zjawiska, których stosowanie w praktyce inżynierskiej wymaga wcześniejszej weryfikacji w laboratorium hydraulicznym. Dla rurowciągów o małej, w stosunku do długości typowej fali, średnicy ($D/\lambda < 0,2$), takim modelem obliczania sił działających na walec, wywołanych niezałamaną falą jest, szeroko stosowany w praktyce inżynierskiej, wzór Morisona [7]. We wzorze tym obciążenie od falo-

Tabl. 1. Wycinek zarejestrowanych danych sztormowych [10]
Sztorm 13-15.10.2009 r. – Zatoka Gdańska – pomiary za pomocą boi falowej w rejonie Kątów Rybackich na głębokości 20,5 m w odległości około 2,4 km od linii brzegowej (19°14,54' E, 54°22,76' N)

Dzień	Godzina początkowa	Godzina końcowa	H _{max} [m]	T _{max} [s]	H _{sig} [m]	T _{sig} [s]	H _{śr} [m]	T _{śr} [s]
14.10.2009	5.00	5.20	7,71	8,2	4,37	8,8	2,85	7,5
14.10.2009	5.30	5.50	7,64	8,0	4,73	8,9	3,03	7,5
14.10.2009	6.00	6.20	7,80	9,5	5,10	9,2	3,32	7,8
14.10.2009	6.30	6.50	7,58	8,5	5,06	9,2	3,31	7,6
14.10.2009	7.00	7.20	8,40	9,8	5,12	9,3	3,33	8,0
14.10.2009	7.30	7.41	7,24	7,7	5,01	9,4	3,21	7,5
14.10.2009	17.00	17.20	11,82	11,4	6,34	11,1	3,83	8,3
14.10.2009	18.30	18.50	11,06	11,0	6,89	10,8	4,57	9,5
14.10.2009	19.30	19.50	11,57	12,6	6,66	11,4	4,25	9,1
14.10.2009	20.00	20.20	9,78	10,8	6,70	11,1	4,34	8,9
14.10.2009	20.30	20.50	8,71	12,3	5,48	10,6	3,62	8,6
14.10.2009	21.00	21.20	9,76	11,5	5,76	11,3	3,90	8,9
14.10.2009	21.30	21.50	10,03	11,4	5,61	10,5	3,45	8,3

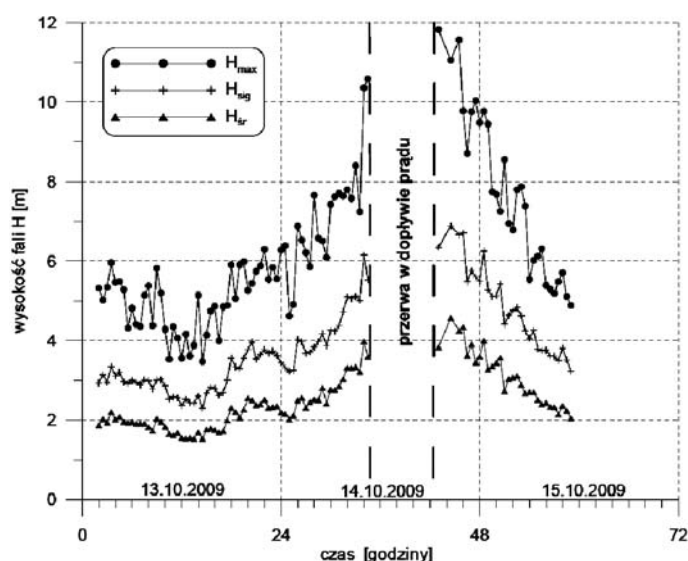
nia przedstawia się w postaci dwóch składowych: bezwładnościowej i wleczenia. Podstawowymi parametrami tego wzoru są przyspieszenie i prędkość przepływu wody w miejscu rurowości. W zależności od wartości tych parametrów przy niezakłóconym przepływie cieczy w miejscu rurowości, odpowiadające im składowe obciążenia są modyfikowane za pomocą współczynników wyznaczanych na drodze doświadczalnej. W danym zagadnieniu szczegółowego wartości tych parametrów (przyspieszenia i prędkości) można określić na podstawie pomiarów w warunkach rzeczywistych. W celu czytelności dyskusji przytoczymy tu dane zarejestrowane w Instytucie Budownictwa Wodnego PAN w Gdańsku za pomocą boi pomiarowej, zakotwiczonej w wybranym miejscu Zatoki Gdańskiej w pewnej odległości od brzegu [10]. Dane te dotyczą okresu sztormowego, w którym zaobserwowano największe wysokości fal powierzchniowych. Część zarejestrowanych danych zestawiono w tabl. 1.

W celu zobrazowania, na rys. 6 przedstawiono wykresy rejestracji fal powierzchniowych; zaznaczono wysokości fali maksymalnej, znacznej oraz średniej.

Z przytoczonych danych wynika, że fala maksymalna miała wysokość $H_{\max} = 11,82$ m, natomiast fala znaczna $H_{\text{sig}} = 6,89$ m. Średni okres fali maksymalnej zawierał się w granicach $T \in (9,5 \div 12,3)$ s. Na podstawie tych danych można określić tzw. wysokość projektową fali. W dalszym ciągu, w celu ilustracji prowadzonej dyskusji, wykorzystamy przedstawione wartości, uzyskane z pomiarów w warunkach rzeczywistych. Należy dodać, że przytoczone tu dane uzyskano przy głębokości wody $h = 20,50$ m. W miejscu rurowości możemy mieć inną głębokość, dla której można wyznaczyć skorygowaną długość fali związanej ze zmianą głębokości. Do tego celu wykorzystuje się związek dyspersyjny:

$$\frac{\omega^2 h}{g} = k_0 h \tanh(k_0 h), \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k_0} \quad (41)$$

Znając głębokość akwenu h w miejscu rurowości, na podstawie zarejestrowanych okresów falowania, możemy wyznaczyć odpowiednie liczby falowe, a na ich podstawie – długości fal w miejscu rurowości.



Rys. 6. Rekordy sztormu zarejestrowane za pomocą boi pomiarowej IBW-PAN w Zatoce Gdańskiej [10]

Przy głębokości $h = 14,50$ m w miejscu zainstalowania istniejącego rurowości w Zatoce Gdańskiej, przyjętej w pracy Sawickiego i in. [14], na podstawie danych zamieszczonych w tabl. 1 (fala maksymalna o wysokości $H_{\max} = 11,82$ m i okresie $T_{\max} = 11,4$ s) wyznaczono długość fali maksymalnej $\lambda_{\max} = 125,74$ m. Podobnie, dla fali znacznej i okresu $T_{\text{sig}} = 10,8$ s wyznaczono długość fali $\lambda_{\text{sig}} = 118,02$ m.

Przy znanej długości i wysokości fali oraz głębokości akwenu należy wyznaczyć prędkość i przyspieszenie cieczy. W tym celu odwołamy się do liniowego rozwiązania ustalonej fali harmonicznego oraz fali Stokesa, przybliżonej przez dwie składowe. Dla ruchu potencjalnego, pozioma i pionowa składowa prędkości orbitalnej według teorii Stokesa opisane są za pomocą wzorów [7]:

$$u = \frac{H}{2} \frac{gT}{\lambda} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \cos \zeta + \frac{3}{4} \left(\frac{\pi H}{\lambda} \right)^2 C \frac{\cosh[2k(z+h)]}{\sinh^4(kh)} \cos 2\zeta \quad (42)$$

$$v = \frac{\pi H}{\lambda} C \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \sin \zeta + \frac{3}{4} \left(\frac{\pi H}{\lambda} \right)^2 C \frac{\sinh[2k(z+h)]}{\sinh^4(kh)} \sin 2\zeta \quad (43)$$

gdzie:

$\zeta = kx - \omega t$,

$C = \omega / k$ – prędkość fazowa fali.

W zapisanych równaniach pionowa współrzędna z mierzona jest od powierzchni spokoju, to znaczy, że dla dna akwenu mamy $z = -h$. Pierwsze wyrazy po prawych stronach tych równań opisują rozwiązanie liniowe fali harmonicznego.

Na podstawie prędkości wyznacza się poziome i pionowe przyspieszenia ruchu orbitalnego cieczy:

$$a_u = \frac{\partial u}{\partial t} = \pi g \frac{H}{\lambda} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \sin \zeta + 3\pi \left(\frac{C}{T} \right) \left(\frac{\pi H}{\lambda} \right)^2 \frac{\cosh[2k(z+h)]}{\sinh^4(kh)} \sin 2\zeta \quad (44)$$

$$a_v = \frac{\partial v}{\partial t} = -2\pi^2 \frac{H}{\lambda} \frac{C}{T} \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \cos \zeta - 3\pi \left(\frac{C}{T} \right) \left(\frac{\pi H}{\lambda} \right)^2 \frac{\sinh[2k(z+h)]}{\sinh^4(kh)} \cos 2\zeta \quad (45)$$

Korzystając z zapisanych równań, dla zaznaczonych fal ekstremalnych wyznacza się składowe prędkości i przyspieszenia cieczy w miejscu osi rurowości, a więc na głębokości $h_r = 2,00$ m ponad dnem akwenu o głębokości $h = 14,50$ m:

A) Fala maksymalna

$$\lambda_{\max} = \lambda = 125,74 \text{ m}, \quad H_{\max} = 11,82 \text{ m} \quad \text{ i } \quad T_{\max} = T = 11,4 \text{ s}$$

– prędkość pozioma:

$$u_{\max} = 4,1459 \cdot \cos \zeta + 1,8928 \cdot \cos 2\zeta$$

– prędkość pionowa:

$$v_{\max} = 0,4129 \cdot \sin \zeta + 0,3734 \cdot \sin 2\zeta$$

- przyspieszenie poziome:

$$a_{u \max} = 2,2851 \cdot \sin \zeta + 2,0865 \cdot \sin 2\zeta$$

- przyspieszenie pionowe:

$$a_{v \max} = -0,2276 \cdot \cos \zeta - 0,4116 \cdot \cos 2\zeta$$

B) Fala znaczna

$$\lambda_{\text{sig}} = \lambda = 118,02 \text{ m}, \quad H_{\text{sig}} = 6,89 \text{ m} \quad \text{ i } \quad T_{\text{sig}} = T = 10,8 \text{ s}$$

- prędkość pozioma:

$$u_{\text{sig}} = 2,3687 \cdot \cos \zeta + 0,5378 \cdot \cos 2\zeta$$

- prędkość pionowa:

$$v_{\text{sig}} = 0,2513 \cdot \sin \zeta + 0,1128 \cdot \sin 2\zeta$$

- przyspieszenie poziome:

$$a_{u \text{ sig}} = 1,3780 \cdot \sin \zeta + 0,6257 \cdot \sin 2\zeta$$

- przyspieszenie pionowe:

$$a_{v \text{ sig}} = -0,1462 \cdot \cos \zeta - 0,1313 \cdot \cos 2\zeta$$

WZÓR MORISONA

Ze względu na to, że poziome składowe prędkości i przyspieszenia w strefie przydennej są znacznie większe od składowych pionowych, w dalszym ciągu ograniczymy rozważania tylko do składowych poziomych. W dyskutowanym tutaj zagadnieniu do obliczania sił działających na wałek wywołanych falą niezależną wykorzystamy wzór Morisona [7, 12, 13]:

$$Q = Q_M + Q_D = C_M \rho \frac{\pi D^2}{4} a_u + C_D \frac{\rho D}{2} |u| u \quad (46)$$

W równaniu tym Q_M oznacza składową masową (inercjalną) obciążenia, Q_D jest składową wleczenia, wywołaną oporem tarcia (lepkości) na pobocznicę walca, C_M i C_D są współczynnikami bezwładności i oporu wyznaczanymi na drodze doświadczalnej, natomiast a_u i u są poziomymi składowymi przyspieszenia i prędkości w warunkach bez obecności walca. Współczynniki C_M i C_D , wyznaczone na drodze eksperymentalnej, wyraża się głównie w postaci zależności od liczby Reynoldsa:

$$\text{Re} = \frac{U_m D}{\nu} \quad (47)$$

oraz liczby Keulegana-Carpentera:

$$K = \frac{U_m T}{D} \quad (48)$$

W ostatnich równaniach U_m jest amplitudą ruchu periodycznego ($U = U_m \cos \zeta$), D jest średnicą walca, T jest okresem oscylacji, natomiast ν jest kinematycznym współczynnikiem lepkości cieczy.

Obszerłą dyskusję dotyczącą współczynników C_M i C_D w równaniu Morisona zawiera monografia Sarpkayi i Isaacsona [13]. Ze względu na złożoność problemu i ograniczony zakres badań eksperymentalnych, do celów praktycznych można przyjąć przybliżone wartości współczynników, akceptowane w praktyce inżynierskiej. Przytoczymy tutaj wartości tych współczynników zaproponowane w książce Massela [7], str. 230. Współczynniki te, zależne od liczby Reynoldsa, mają następujące wartości:

$$\begin{aligned} C_M &= 2 & \text{dla } \text{Re} \leq 2,5 \cdot 10^5 \\ C_M &= 2,5 - \frac{\text{Re}}{5 \cdot 10^5} & \text{dla } 2,5 \cdot 10^5 < \text{Re} \leq 5 \cdot 10^5 \\ C_M &= 1,5 & \text{dla } \text{Re} > 5 \cdot 10^5 \end{aligned} \quad (49)$$

oraz

$$\begin{aligned} C_D &= 1,2 & \text{dla } \text{Re} \leq 2 \cdot 10^5 \\ C_D &= 1,2 - 0,5 \left(\frac{\text{Re}}{3 \cdot 10^5} - \frac{2}{3} \right) & \text{dla } 2 \cdot 10^5 < \text{Re} \leq 5 \cdot 10^5 \\ C_D &= 0,7 & \text{dla } \text{Re} > 5 \cdot 10^5 \end{aligned} \quad (50)$$

Należy zaznaczyć, że w zależności od chropowatości powierzchni, w literaturze przedmiotu można znaleźć nieco inne oszacowania tych współczynników. Do naszych celów, jako miarodajne przyjęto te zaczerpnięte z pracy [7].

Do wyznaczenia maksymalnych wartości obciążenia rurociągu potrzebne są wartości współczynników lepkości kinematycznej wody. Współczynniki te są w ogólności zależne od zasolenia i temperatury. Przytoczymy tutaj wartości zaczerpnięte z literatury przedmiotu [2].

Tabl. 2. Współczynniki lepkości wody

Woda słodka

Temperatura [°C]	Współczynnik lepkości kinematycznej [m²/s]
0	$1,887 \times 10^{-6}$
5	$1,519 \times 10^{-6}$
10	$1,307 \times 10^{-6}$
15	$1,140 \times 10^{-6}$

Woda morska

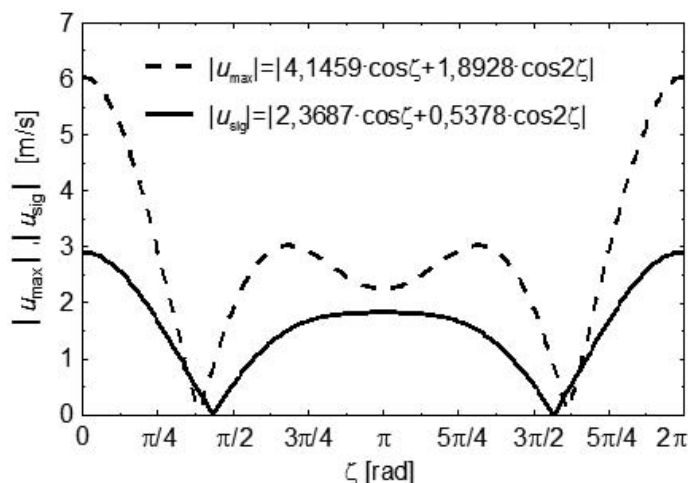
Temperatura [°C]	Współczynnik lepkości kinematycznej [m²/s]
0	$1,83 \times 10^{-6}$
5	$1,56 \times 10^{-6}$
10	$1,35 \times 10^{-6}$
15	$1,19 \times 10^{-6}$

W celu wyznaczenia liczb Reynoldsa do dyskutowanych fal grawitacyjnych przyjmuje się amplitudę prędkości poziomej cieczy, a więc $U_{\max} = 4,1459 \text{ m/s}$ dla fali maksymalnej i $U_{\text{sig}} = 2,3687 \text{ m/s}$ dla fali znacznej. Przyjmując w dalszym ciągu temperaturę wody równą 0°C, dla średnicy walca $D = 1,00 \text{ m}$ otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \text{Re}_{\max} &= \frac{U_{\max} D}{\nu} = \frac{4,1459 \cdot 1,00}{1,83 \times 10^{-6}} = 2,2655 \times 10^6 \\ \text{lub} \quad \text{Re}_{\text{sig}} &= \frac{2,3687 \cdot 1,00}{1,83 \times 10^{-6}} = 1,2944 \times 10^6 \end{aligned} \quad (51)$$

Dla dyskutowanych fal liczba Reynoldsa $\text{Re} > 10^6$ przyjęto zatem jako obowiązujące wartości:

$$C_M = 1,5 \quad \text{ i } \quad C_D = 0,7 \quad (52)$$



Rys. 7. Moduł wartości prędkości w przedziale jednego okresu fali

Dla tych wartości poziome obciążenia rurociągu opisuje się równaniami:

$$Q_{\max} = Q_{M,\max} + Q_{D,\max} = 375\pi \times [2,2851 \cdot \sin \zeta + 2,0865 \cdot \sin 2\zeta] + 350 \times [4,1459 \cdot \cos \zeta + 1,8928 \cdot \cos 2\zeta] \times [4,1459 \cdot \cos \zeta + 1,8928 \cdot \cos 2\zeta] \quad (53)$$

oraz

$$Q_{\text{sig}} = Q_{M,\text{sig}} + Q_{D,\text{sig}} = 375\pi \times [1,3780 \cdot \sin \zeta + 0,6257 \cdot \sin 2\zeta] + 350 \times [2,3687 \cdot \cos \zeta + 0,5378 \cdot \cos 2\zeta] \times [2,3687 \cdot \cos \zeta + 0,5378 \cdot \cos 2\zeta] \quad (54)$$

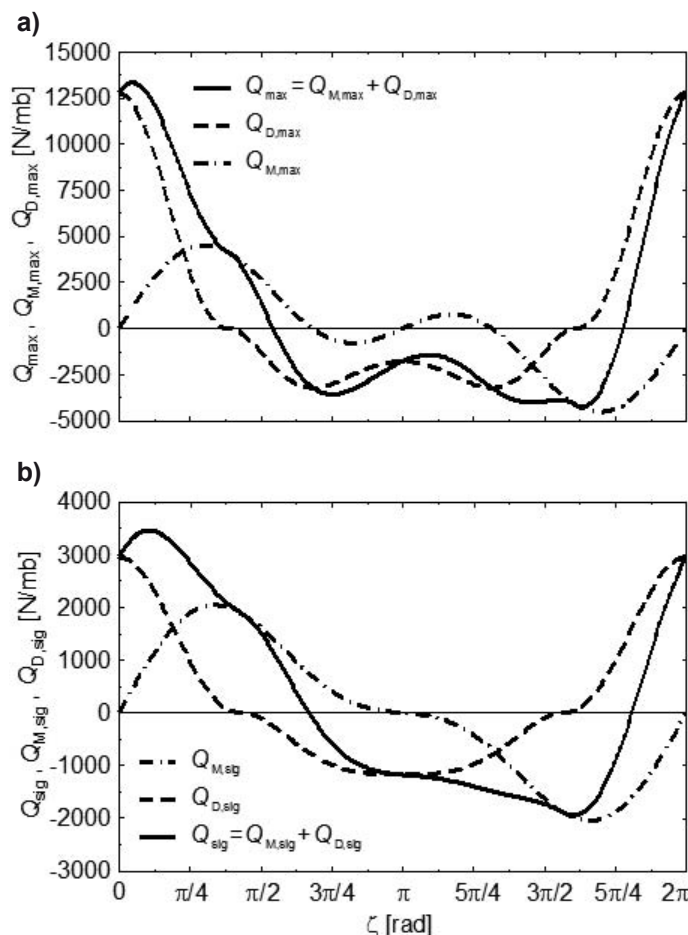
W celu ilustracji, na kolejnych rysunkach naniesiono wykresy zmienności obciążenia w obszarze jednego okresu i na tej podstawie wyznaczono największe teoretyczne obciążenie na metr bieżący rurociągu. W podobny sposób można wyznaczyć pionowe składowe obciążenia, które są bezwzględnie mniejsze od obciążeń poziomych. Na rys. 7 naniesiono wykresy bezwzględnych wartości $|u|$ fali Stokesa odpowiadającej fali maksymalnej i fali znacznej.

Na rys. 8 przedstawiono wykresy obciążeń poziomych na jednostkę długości rurociągu w przedziale jednego okresu fali. Z wykresów tych wynika, że maksymalne wartości obciążeń dla fali maksymalnej i fali znacznej osiągają wartości:

$$\begin{aligned} \text{Fala maksymalna: } Q_{\max} &= 13343 \text{ N/mb} \\ \text{Fala znaczna: } Q_{\text{sig}} &= 3465 \text{ N/mb} \end{aligned} \quad (55)$$

DYNAMIKA RUROCIĄGU WIELOPRZĘŚŁOWEGO

W celu ilustracji prowadzonej dyskusji, rozważa się przykład rurociągu wieloprzęśłowego o założonej liczbie podpór. Rurociąg będziemy traktować jako belkę wieloprzęśłową poddaną obciążeniu zmiennemu w czasie. Z przedstawionej dyskusji wynika, że w celach praktycznych, do wyznaczenia ruchu belki uzasadnione jest korzystanie z uproszczonego równania ruchu, w którym pominięto prędkość przepływu cieczy wewnątrz rurociągu. Zatem, w miejsce równania (3) będziemy korzystać z równania (40), które zapiszemy w postaci:



Rys. 8. Rozkład obciążeń poziomych na jednostkę długości rurociągu w przedziale jednego okresu: a) fala maksymalna, b) fala znaczna

$$M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + K \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = Q(x, t) \quad (56)$$

gdzie:

M – suma masy rurociągu, masy transportowanej cieczy oraz masy cieczy współdrżącej na jednostkę długości rurociągu,

$K = EJ$ – sztywność rury na zginanie,

$Q(x, t)$ – obciążenie zewnętrzne na jednostkę długości rurociągu.

W dalszym ciągu, w nawiązaniu do dyskusji w poprzednich punktach, w celu wyznaczenia obciążenia zewnętrznego $Q(x, t)$ wykorzystamy wzór Morisona. Należy podkreślić, że wzór ten jest pewnym przybliżeniem opisu oddziaływania cieczy na rurociąg umieszczony w polu falowym cieczy i jako taki odpowiada sytuacji, w której nie ma przemieszczenia rurociągu. W dyskutowanym zadaniu, z uwagi na małe przemieszczenia poprzeczne rurociągu, przyjęto jako uzasadnione bezpośrednie wykorzystanie tego wzoru (bez korekcji pola prędkości) do opisu obciążeń wywołanych falowaniem morza. Stąd, w dalszym ciągu, w celu wyznaczenia obciążenia zewnętrznego będziemy korzystać z równania Morisona, w którym prędkości i przyspieszenia cieczy odpowiadają przypadkowi niezaburzonego pola przepływu falowego cieczy bez obecności rurociągu. Naszym celem jest wyznaczenie zmian sił wewnętrznych, w tym szczególnie reakcji podpór w przedziale jednego okresu falowania. Ze względu na to, że siły poziome mogą być czynnikiem decydującym o bezpiecznej pracy rurociągu, ograniczymy rozważania tylko do takich obciążeń. W celu wyznaczenia zmian

sił wewnętrznych rurociągu oraz reakcji podporowych w czasie należy znaleźć rozwiązanie równania (56) dla belki wieloprzęsłowej. W dalszym ciągu będzie skonstruowane rozwiązanie zagadnienia początkowego obciążenia rurociągu narastającą grawitacyjną falą powierzchniową, w którym rurociąg i otaczająca go ciecz rozpoczynają ruch ze stanu spokoju. W przyjętym modelu, do opisu narastania fali wykorzystamy wzór zaproponowany w pracy [18] do opisu ruchu generatora fal, startującego ze stanu spokoju:

$$X_g(t) = A(t) \cos(\omega t) + D(t) \sin(\omega t) \quad (57)$$

gdzie:

$$A(t) = \frac{\tau^3}{3!} \exp(-\tau)$$

$$D(t) = 1 - \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^3}{3!} \right) \exp(-\tau), \quad \tau = \eta \cdot t \quad (58)$$

W zapisanych wzorach η jest parametrem (przyjęto $\eta = 2$), który wpływa na szybkość narastania $X_g(t)$ w czasie $t > 0$. Proces opisany równaniami (57) i (58) ma ważne własności, przydatne do opisu ruchu harmonicznego. Dla $t \rightarrow 0$ proces (57), jak również jego pierwsze i drugie pochodne względem czasu dążą do zera. Wraz z upływem czasu ($t > 0$) proces dąży do ustalonego ruchu harmonicznego o jednostkowej amplitudzie. Praktycznie, po czasie równym dwóm okresom mamy ustalony ruch harmoniczny. Ograniczając w dalszym ciągu rozważania do liniowej fali harmonicznej, poziome składowe prędkości i przyspieszenie cieczy wywołane taką falą możemy wyrazić w następującej postaci:

$$u = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(z_0 + h)}{\sinh(kh)} X_g(t)$$

$$a_u = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(z_0 + h)}{\sinh(kh)} \frac{dX_g(t)}{dt} \quad (59)$$

W celu wyznaczenia obciążenia rurociągu, narastającego z czasem do ustalonej wartości dla fali o wysokości H , ostatnie równania należy podstawić do wzoru Morisona (46). Przy przyjętej fali o parametrach T , H i k_0 i znanym położeniu osi rurociągu, $-(z_0 + h)$ w równaniach (59) oznacza odległość osi rurociągu od dna akwenu, możemy wyznaczyć obciążenie rurociągu narastające w czasie do wartości ustalonej. Rozwiązanie problemu nieustalonego ruchu rurociągu, opisanego równaniem (56), konstruuje się w sposób przybliżony za pomocą metody różnic skończonych (MRS). Do zapisania równań różnicowych przyjmuje się siatkę dyskretną o stałej odległości między węzłami $\Delta x = a = \text{const.}$ w ten sposób, że podpory belki pokrywają się z pewnymi węzłami siatki. W nawiązaniu do przyjętej metody dyskretniej, pochodną przestrzenną w równaniu (56) zastępuje się ilorazem różnicowym, który zapisuje się dla wszystkich węzłów założonej siatki, zatem dla $i = 1, 2, \dots, N$.

Procedura ta prowadzi do następujących wektorów pochodnych ugięcia belki:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \rightarrow \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) = [C](y) \quad (60)$$

gdzie:

(y) – wektor wartości y_i w kolejnych węzłach założonej siatki,
 $[C]$ – macierz, która wynika z przyjętego schematu różnicowego i warunków brzegowych. Dla belki wolnopodpartej i centralnego schematu różnicowego, macierz tę można zapisać w następującej postaci:

$$[C] = \frac{1}{a^4} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Elementy tej macierzy odpowiadają wewnętrznym węzłom siatki dyskretniej – bez skrajnych podpór. W miejscach podpór wewnętrznych, na głównej diagonalnej tej macierzy należy podstawić dowolne – bardzo duże liczby. Podstawiając zapisane wyrażenia do analogu różnicowego równania (46), otrzymuje się:

$$[MA] \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) + [KS](y) = (Q) \quad (62)$$

gdzie:

$[MA]$ – macierz mas,
 $[KS]$ – macierz sprężystości,
 (Q) – wektor obciążenia.

Przy zadanych warunkach początkowych, ostatnie równanie można scałkować numerycznie dla przyjętej dyskretyzacji czasu. W tym celu wykorzystuje się metodę Wilsona θ . W metodzie tej przyspieszenie pomiędzy dwoma kolejnymi punktami czasu jest aproksymowane za pomocą funkcji liniowej. Dla układu mechanicznego, procedura ta jest bezwzględnie zbieżna dla $\theta > 1,37$ [1]. W celu czytelności dyskusji, zapisuje się podstawowe równania tej metody. Przy przemieszczeniu $y(t)$ prędkość i przyspieszenie opisane są równaniami:

$$\frac{\partial y_3}{\partial t} = \frac{3}{DT} (y_3 - y_1) - 2 \frac{\partial y_1}{\partial t} - \frac{DT}{2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} = \frac{6}{DT^2} (y_3 - y_1) - \frac{6}{DT} \frac{\partial y_1}{\partial t} - 2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \quad (63)$$

gdzie:

$y_1 = y(t)$ – znana wartość,
 $y_3 = y(t + DT)$ – wartość nieznana,
 $DT = \theta \Delta t$,
 Δt – założony krok czasu,
 $\theta = 1,47$ – wartość przyjęta w obliczeniach.

Do celów obliczeniowych wygodnie jest zapisać powyższe równania w następujących postaciach:

$$\frac{DT}{3} \frac{\partial y}{\partial t} = y_3 - \left(y_1 + \frac{2DT}{3} \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{DT^2}{6} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \right) = y_3 - f_1$$

$$\frac{DT^2}{6} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = y_3 - \left(y_1 + DT \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{DT^2}{3} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \right) = y_3 - f_2 \quad (64)$$

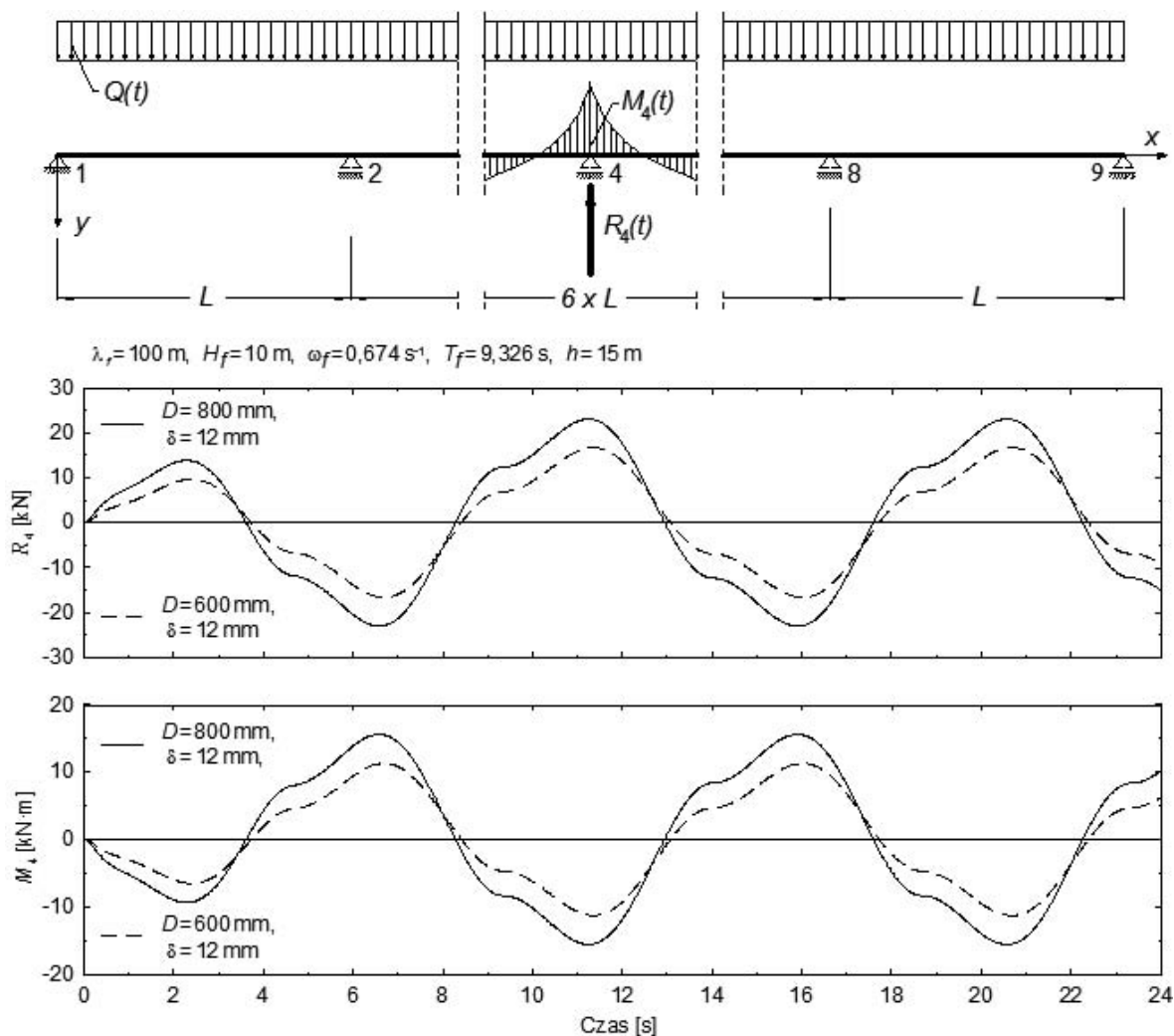
Zapisany układ równań (62) obowiązuje dla każdej chwili czasu, także dla $t_3 = t_1 + DT$. Podstawiając zależności (63) i (64) do równia (62), otrzymuje się:

$$[MAT](y_3) = (PA) + \frac{DT^2}{6} (Q_3) \quad (65)$$

gdzie:

$$[MAT] = [MA] + \frac{DT^2}{6} [KS]$$

$$(PA) = [MA](f_2) + \frac{DT}{2} [CT](f_1) \quad (66)$$



Rys. 9. Rozkład reakcji podporowej i momentu podporowego w czasie

Rozwiązanie równania (65) daje wektor przemieszczeń w czasie $t_3 = t_1 + \theta \Delta t$. Na jego podstawie możemy wyznaczyć wektory prędkości i przyspieszenia w tym samym czasie. Zatem, znając y_3 , $\frac{\partial y_3}{\partial t}$ oraz $\frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2}$ możemy wyznaczyć interesujące nas wielkości:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(t + \Delta t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \frac{\Delta t}{DT} \left(\frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial y(t + \Delta t)}{\partial t} &= \frac{\partial y_1}{\partial t} + \Delta t \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^2}{2DT} \left(\frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \right) \\ y(t + \Delta t) &= y_1 + \Delta t \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{6DT} \left(\frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \right) \quad (67) \end{aligned}$$

Dla zadanego przekroju rurociągu i znanego obciążenia zewnętrznego, wyprowadzone równania pozwalają na wyznaczenie jego przemieszczeń (ugięcia) w funkcji czasu, jak też pochodnych przestrzennych ugięcia i tym samym momentów zginających, sił poprzecznych i reakcji podporowych. W tym celu wykonano obliczenia do rurociągu o ośmiu przęsłach o jednakowej rozpiętości obciążonego falą grawitacyjną o wysokości $H = 10$ m i długości $\lambda = 100$ m. Ilustracją tych obliczeń jest rys. 9, na którym naniesiono wykresy reakcji podporowej na

czwartej podporze i momentu zginającego w miejscu tej podpory w funkcji czasu. Wykresy te otrzymano dla przypadku układu rozpoczynającego ruch ze stanu spokoju. Jak widać, po przekroczeniu czasu $t > 2T$ możemy uważać ruch układu za ustalony.

PODSUMOWANIE

Podstawą wykonanej analizy dynamiki rurociągu obciążonego falowaniem grawitacyjnym są liniowe równania małych drgań poprzecznych rurociągu, traktowanego jako belka wieloprzęsłowa. W obliczaniu obciążeń hydrodynamicznych rurociągu odwołano się do istniejących w literaturze przedmiotowej rozwiązań. Z przeprowadzonej analizy wynika, że w obliczeniach dynamicznych takich konstrukcji można pominąć, jako marginalnie mały, wpływ prędkości transportowanej cieczy na wartości częstości drgań własnych. W obliczeniach tych masa dołączonej cieczy wynikająca z obecności cieczy na zewnątrz rurociągu może być z dobrym przybliżeniem przyjmowana jako równa masie cieczy wypartej przez rurociąg. Jeżeli odległość osi rurociągu od dna akwenu jest większa od trzech promieni rurociągu, to w obliczaniu obciążeń hydrodynamicznych rurociągu można pominąć składową pionową siły wzbudzoną poziomym przepływem cieczy w obszarze zainstalowania rurociągu. Pod-

stawowe znaczenie w ocenie obciążenia rurociągu ma wartość prędkości i przyspieszenia cieczy wzbudzona falowaniem morza. Zamieszczone przykłady liczbowe odnoszą się do rzeczywistych warunków sztormowych zarejestrowanych w Zatoce Gdańskiej. Wskazują one, że obciążenia poziome rurociągu wywołane ekstremalnym falowaniem grawitacyjnym mogą być, ze względu na swoją wartość oraz okresowość w czasie, decydujące do zapewnienia bezpiecznej eksploatacji takich konstrukcji. Otwarte pozostaje pytanie, jakie falowanie powinno być brane pod uwagę przy projektowaniu takich konstrukcji, a zatem jaka fala powinna być brana pod uwagę jako fala projektowa. Jeżeli konstrukcja rurociągu wsparta jest na pojedynczych palach, ponad dnem akwenu, to zmienność obciążenia w czasie może prowadzić do osłabienia podparcia. W tym ostatnim przypadku ważnym problemem inżynierskim jest właściwa konstrukcja podparcia rurociągu, które powinno zapewniać bezpieczne funkcjonowanie konstrukcji przy zmiennych obciążeniach w czasie (o zmiennych znakach). Może to być szczególnie ważne w przypadku rurociągów wykonanych z tworzyw sztucznych, które nie mają tak dużej sztywności na zginanie jak rurociągi stalowe.

LITERATURA

1. Bathe K. J.: *Finite Element Procedure in Engineering Analysis*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1982.
2. Blevins R. D.: *Applied Fluid Dynamics Handbook*. V. Nostrand Reinhold Company, New York, 1984.
3. Blevins R. D.: *Flow-induced vibration*. R.E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida 1986.
4. Carpenter L. H.: On the motion of two cylinders in an ideal fluid. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 61, No. 2, August 1958, 83-87.
5. Magda W.: *Rurociągi podmorskie. Zasady projektowania*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
6. Malecki I.: *Teoria fal i układów akustycznych*. PWN, Warszawa, 1964.
7. Massel S. i in.: *Poradnik Hydrotechnika. Obciążenia budowli hydrotechnicznych wywołane przez środowisko morskie*. Wydawnictwo Morskie, Gdańsk 1992.
8. McLachlan N. W.: *Funkcje Bessela dla inżynierów*. PWN, Warszawa 1964.
9. Milne-Thomson L. M.: *Theoretical Hydrodynamics*. Fifth Edition, Macmillan, 1968.
10. O'Neil M. E., Chorlton F.: *Ideal and incompressible fluid dynamics*. Ellis Horwood Limited, Chichester, 1986.
11. Ostrowski R., Biegowski J., Kaczmarek L. M., Kapiński J., Piotrowska D., Pruszek Z., Różyński G., Schönhofer J., Skaja M., Swerpel B., Szmytkiewicz M., Szmytkiewicz P.: *Zmienność procesów hydrodynamicznych i litodynamicznych w strefie brzegowej wschodniej części Zatoki Gdańskiej. Raport z realizacji projektu badawczego*, IBW PAN, Gdańsk 2010.
12. Sarpkaya T.: Force on a cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter number. *J. Fluid Mech.* (1986) vol. 165, 61-71.
13. Sarpkaya T., Isaacson M.: *Mechanics of Wave Forces on Offshore Structures*. V. Nostrand Reinhold Comp. 1981.
14. Sawicki J., Bolt A., Cudny M., Marcinkowski T.: *Wymiarowanie głębokowodnych wylotów kanalizacyjnych*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 1998.
15. Szmidt J. K.: *Wprowadzenie do hydrosprężystości konstrukcji morskich*. IBW PAN, Gdańsk 1999.
16. Wilde P.: Nonlinear interaction of free vibrations of cylinder in water near a plane bottom. *J. of Fluids and Structures*, 9, 1995, 697-711.
17. Wilde P.: Lagrange's equations for two-dimensional motion of a cylinder in perfect fluid. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 2, 35, 1997, 465-482.
18. Wilde P., Wilde M.: On the Generation of Water Waves in a Flume. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, Vol. 48, No.4, 2001, 69-83.
19. Yamamoto T., Nath J. H., Slotta L. S.: Wave Forces on Cylinders Near Plane Boundary. *J. Waterways, Harbours and Coastal Engineering Division*, November 1974, 345-359.