

Oszacowanie losowej nośności ławy fundamentowej na podstawie mechanizmów kinematycznych

Mgr inż. Marcin Chwała, dr hab. inż. Wojciech Puła

Politechnika Wrocławska, Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego

Zmienność przestrzenna parametrów charakteryzujących podłoże jest niezwykle istotna w geotechnice, co odróżnia ją od pozostałych dziedzin budownictwa. Zmienność przestrzenna podłoża ma znaczący wpływ na poziom bezpieczeństwa konstrukcji. Fizyczne i mechaniczne parametry podłoża wykazują zmienność przestrzenną także dla jednorodnych warstw geotechnicznych; jest to spowodowane naturalnymi procesami sedymentacyjnymi oraz konsolidacyjnymi. Aby uwzględnić przestrzenną zmienność parametrów gruntu wydaje się właściwe wykorzystanie metod probabilistycznych, przy pomocy których możliwe jest oszacowanie miar niezawodności w geotechnice, i nie tylko. W ostatnich dekadach wielu badaczy zwróciło się w stronę metod probabilistycznych [3, 6, 14, 15, 27]. Dzięki szerokiemu zainteresowaniu oraz nieustannemu zwiększaniu mocy obliczeniowej komputerów w ostatnich latach dokonał się znaczący postęp w wykorzystaniu metod probabilistycznych w geotechnice. W kontekście oszacowania górnego w ramach teorii nośności granicznej, zastosowanego w niniejszej pracy, należy przytoczyć niedawno opracowane metody, takie jak: RFLA (*random filed limit analysis*) [7] oraz RAFELA (*random adaptive finite element method*) [1]. Metoda kinematyczna w ramach teorii nośności granicznej jest niezwykle użytecznym narzędziem wykorzystywanym także przez badaczy z Polski, na przykład [9, 11, 20]. We wcześniejszym artykule autorów [21] metodę kinematyczną połączono z uśrednieniami lokalnymi Vanmarcke'a [27, 28, 29]. Podejście zaprezentowane w [21] było motywowane potrzebą bardziej dokładnego opisu parametrów gruntu za pomocą pól losowych. W niniejszej pracy autorzy przedstawiają rezultaty prac prowadzonych nad rozwojem i ulepszeniem podejścia przedstawionego w [21] o możliwość uwzględnienia ciężaru gruntu oraz analizę mechanizmów niesymetrycznych. Zgodnie z teorią stanów granicznych [4] mechanizm Prandtla [19] jest optymalny tak długo, jak długo rozważamy grunt nieważki (oszacowania górne i dolne są sobie równe). Jeśli natomiast uwzględnimy ciężar objętościowy podłoża, powyższe przestaje zachodzić. Wpływ ciężaru objętościowego na wartość nośności podłoża zbadał Michałowski [17]. W niniejszej pracy przyjęto, jako wyjściowy model deterministyczny, mechanizm wieloblokowy zaproponowany przez Michałowskiego w [17]. W przypadku rozważania ciężaru gruntu nie ma możliwości podania w jednoznaczny i jawny sposób optymalnej geometrii zniszczenia (to znaczy geometrii prowadzącej do najniższej nośności) dla określonych parametrów podłoża; zadanie znalezienia geometrii zniszczenia staje się zagadnieniem optymalizacyjnym. Geometria zniszczenia ma także wpływ na poziom uśrednień pola losowego, który będzie większy w przypadku większych rozmiarów mechanizmu zniszczenia (dłuższe linie poślizgu – większa redukcja wariancji [21]). Jak wskazano w [21], uśrednianie lokalne powinno być zaadoptowane do wielkości obszaru gruntu biorącego udział w mechanizmie zniszczenia, dlatego też rozważenie optymalnego mechanizmu zniszczenia, wynikającego z metody kinematycznej w teorii stanów

granicznych, wydaje się właściwe. Jako metodę optymalizacji wybrano tak zwaną metodę wyżarzania (*simulated annealing*) [12, 13], która sprawdziła się w zagadnieniach geotechnicznych [24, 25] oraz mikromechanice [16, 26].

Biorąc pod uwagę parametry naturalnych gruntów [2, 5, 10], założono anizotropię parametrów przestrzennych podłoża gruntowego, przyjmując słabszą korelację między parametrami na kierunku poziomym (większa wartość poziomej skali fluktuacji).

Głównym celem rozważań przedstawionych w artykule jest zbadanie wpływu założenia symetrii mechanizmu zniszczenia na otrzymane wartości wskaźników niezawodności w porównaniu z mechanizmem niesymetrycznym przy uwzględnieniu ciężaru objętościowego gruntu. Niesymetryczność mechanizmu zniszczenia nie jest rozpatrywana w przypadku deterministycznym, gdzie mechanizm symetryczny jest optymalny. Jednakże, biorąc pod uwagę przestrzenną zmienność parametrów wytrzymałościowych podłoża, wystąpienie mechanizmu symetrycznego wydaje się wielce nieprawdopodobne. W celu przeprowadzenia wspomnianych analiz autorzy opracowali nowy algorytm umożliwiający analizę losowej nośności podłoża w przypadku mechanizmu symetrycznego oraz niesymetrycznego wraz z uwzględnieniem ciężaru objętościowego gruntu. Za pomocą pól losowych modelowano wartość kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności. Opracowana procedura pozwala na wyznaczenie miar niezawodności dla rozpatrywanych zagadnień.

NOŚNOŚĆ PODŁOŻA DLA ROZPATRYWANYCH GEOMETRII ZNISZCZENIA

Mechanizm Prandtla

Adaptację mechanizmu Prandtla na potrzeby analiz probabilistycznych prowadzonych przez autorów przedstawiono w pracy [21] oraz [22]. Procedura wyznaczenia nośności granicznej podłoża jest analogiczna jak w rozdziale *Mechanizm wieloblokowy*, z tą różnicą, że występuje obszar ciągłej deformacji. Mechanizm Prandtla jest mechanizmem optymalnym dla gruntu nieważkiego; w związku z tym, po uwzględnieniu ciężaru podłoża, otrzymane wartości nośności podłoża na podstawie mechanizmu Prandtla są zawyżone. Jak pokazano w punkcie 8, uwzględnienie ciężaru gruntu prowadzi do wyraźnych różnic w otrzymanych wartościach nośności (przy przyjęciu mechanizmu Prandtla).

Mechanizm wieloblokowy

W niniejszym rozdziale rozważa się mechanizm składający się ze sztywnych bloków gruntu, z liniami nieciągłości prędkości pomiędzy nimi [9, 17]. Formuła na graniczną wartość nośno-

ści wywodzi się z twierdzenia o oszacowaniu górnym nośności w teorii stanów granicznych, w którym postuluje się, że moc sił zewnętrznych jest mniejsza bądź równa energii dyssypacji dla dowolnego kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu niszczenia [9, 17]. Wzór na nośność graniczną można przedstawić w często używanej postaci:

$$p = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma bN_\gamma \quad (1)$$

gdzie:

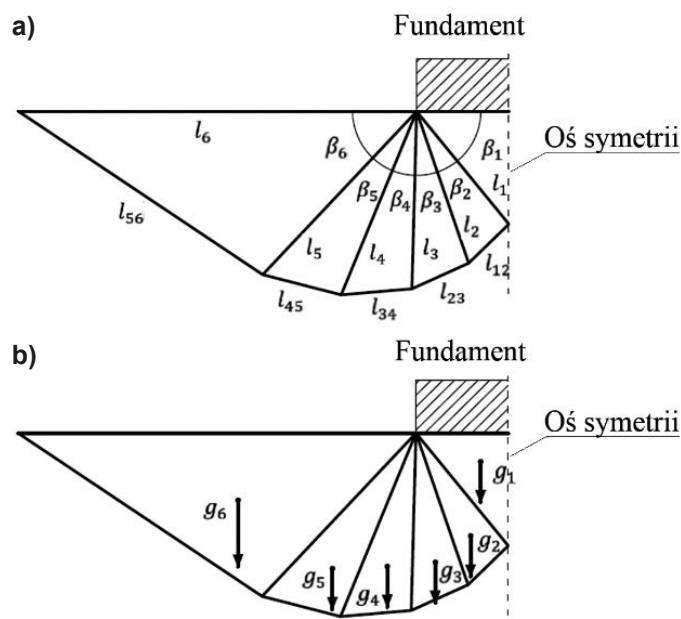
- c – spójność gruntu,
- q – naprężenie obok fundamentu,
- γ – ciężar objętościowy gruntu
- b – szerokość fundamentu,
- N_c, N_q, N_γ – współczynniki związane odpowiednio ze spójnością, naprężeniem obok fundamentu oraz ciężarem własnym gruntu.

Gdy mamy do czynienia z gruntem nieważkim ($\gamma = 0$), pierwsze dwa współczynniki są wyłącznie funkcjami kąta tarcia wewnętrznego, a w przypadku $\gamma \neq 0$ wartości N_c, N_q oraz N_γ stają się funkcjami zależnymi od c, q, γ i b [17]. Przyjmując $\gamma \neq 0$, roz-

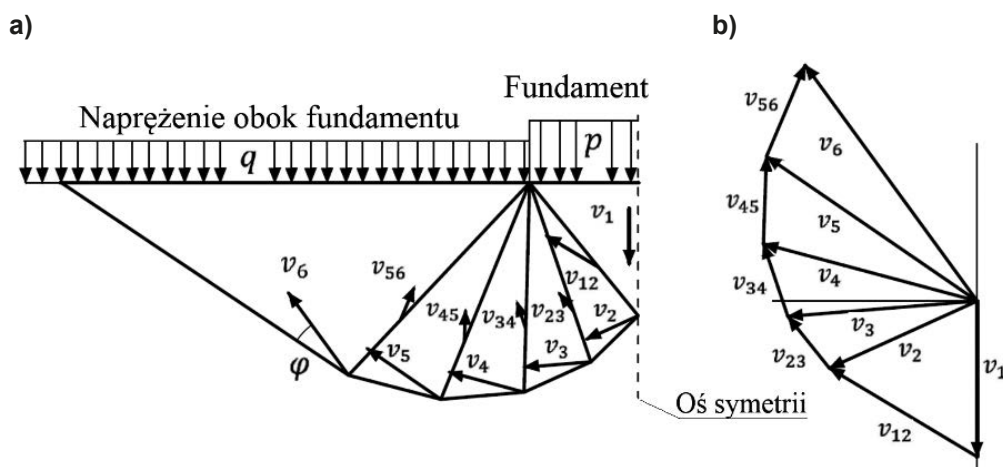
wiązanie Prandtla nie jest rozwiązaniem ścisłym (oszacowania górne i dolne są różne): wartość N_γ otrzymana dla mechanizmu Prandtla jest bardziej konserwatywna w porównaniu z mechanizmem wieloblokowym. Pomimo tego, mechanizm wieloblokowy dąży do rozwiązania Prandtla w przypadku, gdy ciężar objętościowy zmierza do zera.

Jako pierwszy rozważmy mechanizm symetryczny, co oznacza, zgodnie z rys. 1, że lewa i prawa strona mechanizmu są identyczne. Na rys. 1 przykładowo przedstawiono mechanizm 6-blokowy. Geometrię zniszczenia determinuje zestaw kątów β_i oraz długości l_i .

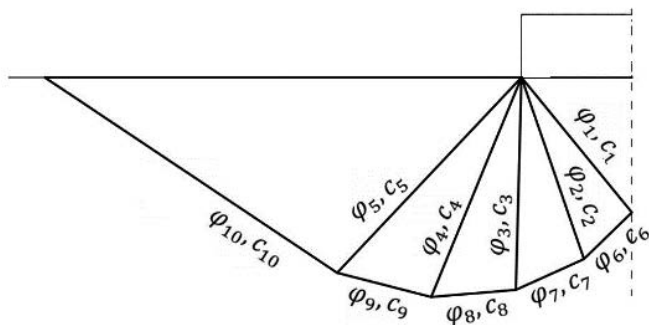
Niezbędne do wyznaczenia nośności granicznej są: geometria zniszczenia, prędkości sztywnych bloków (rys. 2), ciężary poszczególnych bloków gruntu g_i (rys. 1a), dyssypacje na każdej linii nieciągłości prędkości, naprężenie obok fundamentu q oraz wartości parametrów wytrzymałościowych: kąt tarcia wewnętrznego φ i spójność c . Przy symetrycznym mechanizmie 6-blokowym geometria zniszczenia jest jednoznacznie wyznaczona przez pięć wartości kątów $\beta_1 \div \beta_5$ (szósty kąt otrzymuje się po odjęciu sumy pozostałych od 180) oraz sześć długości linii poślizgu $l_1 \div l_6$. Aby zapewnić kinematyczną dopuszczalność mechanizmu zniszczenia, wektory prędkości muszą być nachylone do linii poślizgu pod kątem φ ; przy takim założeniu, długości wektorów prędkości wyznacza się z relacji geometrycznych, jak przedstawiono schematycznie na rys. 2. Moc sił ciężkości określonego bloku uzyskuje się poprzez pomnożenie masy bloku, przyspieszenia ziemskiego oraz pionowej składowej wektora prędkości danego bloku. Dla gruntu spoistego energia jest dyssypowana wzdłuż linii poślizgu (linia nieciągłości prędkości). W celu obliczenia wielkości dyssypacji na określonej linii długość tej linii jest mnożona przez wartość spójności oraz wartość prędkości zrzutowaną na tę linię ($\cos \varphi$). Na podstawie powyższego wyznacza się wartości współczynników nośności N_c, N_q i N_γ [4, 9]. Przedstawiony sposób obliczeń jest właściwy, gdy mamy do czynienia ze stałymi wartościami φ i c (zagadnienie deterministyczne). Aby otrzymać optymalną (najmniejszą) wartość nośności podłoża, geometria zniszczenia musi być poddana optymalizacji, tak żeby suma trzech składników w równaniu (1) była minimalna. W związku z tym równanie (1) staje się funkcją celu w procedurze optymalizacyjnej. W algorytmie zaproponowanym przez autorów aplikuje się pola losowe do opisu



Rys. 1. Przykład geometrii zniszczenia: a) 6-blokowy mechanizm symetryczny, b) ciężary poszczególnych bloków gruntu



Rys. 2. Prędkości sztywnych bloków: a) $v_2 \div v_6$ to prędkości pomiędzy sztywnym blokiem a gruntem znajdującym się w spoczynku, pozostałe prędkości pomiędzy blokami, b) przykładowy hodograf prędkości



Rys. 3. Konwencja oznaczania kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności dla symetrycznego 6-blokowego mechanizmu zniszczenia

przestrzennej zmienności wartości kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności. Podejście takie wymaga zróżnicowania wartości parametrów wytrzymałościowych na poszczególnych liniach poślizgu. Rozważenie różnych wartości φ i c na liniach poślizgu jest stosunkowo proste, jednakże wymaga wyprowadzenia nowych wzorów na nośność graniczną. Przypisanie wartości parametrów wytrzymałościowych do poszczególnych linii poślizgu dla mechanizmu symetrycznego przedstawiono na rys. 3.

Wyprowadzone wyrażenie na nośność graniczną przedstawiono w równaniu (2). Równanie to zapisano w taki sposób, aby wydzielić trzy składniki równania (1). Równanie (2) zapisane dla ogólnego przypadku, gdzie liczbę bloków oznaczono przez n , ma postać:

$$p = cN_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma bN_\gamma = 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} c_i I_i \cos \varphi_i v_{i+1} + \sum_{i=2}^{n-1} c_{i+n-1} I_{i+1} \cos \varphi_{i+n-1} v_{i+1} \right) + + 2I_n v_n q + 2 \sum_{i=1}^n g_i v_i \quad (2)$$

gdzie:

v_i – pionowa składowa danego wektora prędkości.

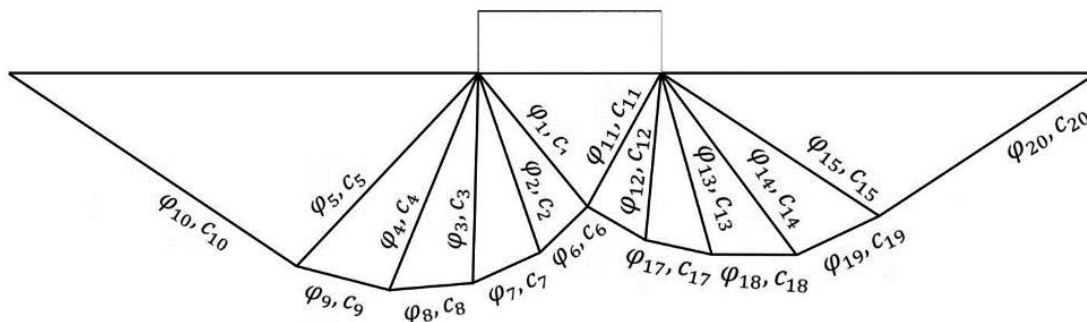
Rys. 1 i 2 odnoszą się do przypadku, gdy $n = 6$. Współczynnik 2 znajdujący się po prawej stronie równania (2) wynika z założonej symetrii mechanizmu zniszczenia. W celu wyznaczenia nośności granicznej należy dla określonej geometrii zniszczenia wyznaczyć sumy z równania (2) oraz iloczyny odpowiedzialne za naprężenie obok fundamentu i moc sił ciężkości. Przechodząc do mechanizmu niesymetrycznego należy uzmiennić także wartości parametrów znajdujące się po prawej stronie, tak jak

przedstawiono na rys. 4. Pokazano tam również przyjętą konwencję oznaczania wartości φ i c na poszczególnych liniach. Nośność graniczna jest wyznaczana w analogiczny sposób jak w równaniu (2), natomiast mnożenie przez współczynnik 2 zastąpione jest sumowaniem po wszystkich liniach poślizgu.

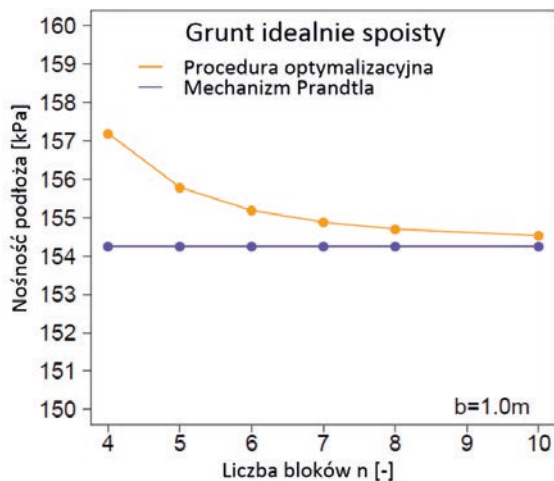
OPTIMALIZACJA MECHANIZMU WIELOBLOKOWEGO

Zgodnie z rozdziałem Nośność podłoża dla rozpatrywanych geometrii zniszczenia minimalizacja nośności granicznej wymaga optymalizacji geometrii mechanizmu zniszczenia. W związku z zagadnieniem wieloparametrowym oraz potrzebą efektywnej metody optymalizacji, wybrano metodę symulowanego wyżarzania (*simulated annealing*), zaproponowaną przez Kirkpatricka [12, 13]. Opracowana procedura optymalizacyjna pozwala w efektywny sposób znajdować geometrię zniszczenia prowadzącą do najmniejszej nośności podłoża. Dokładny jej opis jest zawarty w pracy [22]. Poprawność wyników otrzymanych za pomocą procedury optymalizacyjnej była kontrolowana i sprawdzana na kilka sposobów [22]. Ważnym elementem proponowanego podejścia jest ustalenie liczby bloków: im jest ona większa, tym dokładniejsze (niższe) oszacowanie nośności można znaleźć. Z drugiej strony optymalizacja mechanizmu przy większej liczbie bloków wymaga dłuższego czasu obliczeń. W związku z tym występuje potrzeba znalezienia racjonalnego kompromisu pomiędzy dokładnością a czasem obliczeń. Jedną z możliwości jest wykorzystanie zagadnień, dla których znamy dokładne rozwiązania. Należą do nich: mechanizm Prandtla dla nieważkiego ośrodka oraz podłoże idealnie spoiste. Na początku rozważmy drugi przypadek. Przy zerowej wartości kąta tarcia wewnętrznego wartość nośności granicznej jest determinowana wartością spójności i wynosi $c(2 + \pi)$. Drugi przykład to klasyczny mechanizm Prandtla przy zerowej wartości ciężaru objętościowego gruntu. Rezultaty dla znanych rozwiązań oraz otrzymane w drodze optymalizacji mechanizmu o zmiennej liczbie bloków przedstawiono na rys. 5 oraz rys. 6. Zbieżność rozwiązań wraz ze wzrostem liczby bloków jest widoczna nie tylko w wartości nośności, ale także w kształcie geometrii zniszczenia, co przedstawiono w tabl. 1 i 2.

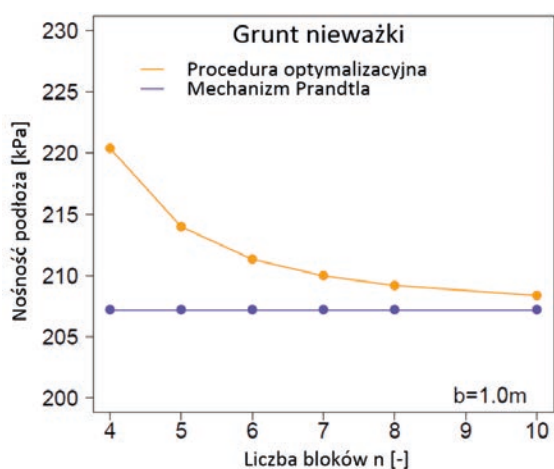
W obydwu przypadkach można zaobserwować wyraźną zbieżność. Aby uniknąć długiego czasu obliczeń, zdecydowano się na wybór mechanizmu 6-blokowego, dla którego otrzymany stosunek dokładności do czasu obliczeń jest najbardziej satysfakcjonujący.



Rys. 4. Konwencja oznaczania kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności dla niesymetrycznego 6-blokowego mechanizmu zniszczenia



Rys. 5. Porównanie dokładnego rozwiązania dla gruntu idealnie spoistego oraz rozwiązania dla mechanizmu wieloblokowego przy zmiennej liczbie bloków (oś pozioma); obliczenia przeprowadzono dla $c = 30$ kPa oraz szerokości fundamentu $b = 1,0$ m. Uwaga: skala na osi pionowej rozpoczyna się od 140 kPa



Rys. 6. Porównanie dokładnego rozwiązania dla gruntu nieważkiego oraz rozwiązania dla mechanizmu wieloblokowego przy zmiennej liczbie bloków (oś pozioma). Założone parametry podłoża: $\varphi = 25^\circ$, $c = 10$ kPa, szerokość fundamentu $b = 1,0$ m. Uwaga: skala na osi pionowej rozpoczyna się od 140 kPa

UŚREDNIENIA PRZESTRZENNE

Parametry wytrzymałościowe gruntu (kąt tarcia wewnętrzny oraz spójność) opisano poprzez dwa niezależne pola losowe. Opis przy pomocy pól losowych jest wskazany, jeśli relatywnie duża objętość gruntu o cechach przestrzennie zmiennych bierze udział w mechanizmie zniszczenia. Korzyści z takiego opisu wskazano w wielu wcześniejszych pracach, na przykład [6, 8, 23].

Ważnym krokiem w wykorzystaniu teorii pól losowych w geotechnice jest koncepcja uśredniania lokalnego zaproponowana po raz pierwszy przez Vanmarcke'a [27, 28, 29]. Uśrednienia lokalne pozwalają uwzględnić sytuację, w której awaria jest konsekwencją zachowania podłoża w określonym obszarze, adekwatnym do rozmiaru konstrukcji, a nie jest konsekwencją punktowej zmienności parametrów opisujących podłoże.

Opierając się na optymalnej geometrii zniszczenia, wyznacza się uśrednienia lokalne dla właściwych linii poślizgu. Podstawowe równanie przedstawiono poniżej:

Tabl. 1. Porównanie geometrii mechanizmów zniszczenia dla gruntu idealnie spoistego otrzymanych dla mechanizmu wieloblokowego i rozwiązania Prandla (por. rys. 5)

Typ mechanizmu	Pierwszy kąt: $\beta_1 [^\circ]$	Suma kątów pośrednich: $\sum_{i=2}^{n-1} \beta_i$	Ostatni kąt: $\beta_n [^\circ]$
Wieloblokowy	47,5	68,0	64,5
Wieloblokowy	46,3	74,9	58,8
Wieloblokowy	45,8	78,5	55,7
Wieloblokowy	45,6	80,8	53,6
Wieloblokowy	45,5	82,2	52,3
Wieloblokowy	45,4	84,9	49,7
Prandtl	45	90	45

Tabl. 2. Porównanie geometrii mechanizmów zniszczenia dla gruntu nieważkiego otrzymanych dla mechanizmu wieloblokowego i rozwiązania Prandla (por. rys. 6)

Typ mechanizmu	Pierwszy kąt: $\beta_1 [^\circ]$	Suma kątów pośrednich: $\sum_{i=2}^{n-1} \beta_i$	Ostatni kąt: $\beta_n [^\circ]$
Wieloblokowy	60,2	67,7	52,1
Wieloblokowy	59,0	74,6	46,4
Wieloblokowy	58,4	78,4	43,2
Wieloblokowy	58,1	80,7	41,2
Wieloblokowy	58,0	82,2	39,8
Wieloblokowy	57,6	84,2	38,2
Prandtl	57,5	90	32,5

$$X_V = \frac{1}{|V|} \iiint_V X(x, y, z) dx dy dz \quad (3)$$

gdzie:

X – właściwość (tutaj pole losowe kąta tarcia wewnętrznego φ lub spójności c),
 V – obszar uśredniania,
 $|V|$ – miara obszaru uśredniania.

W równaniu (3) definiuje się nowe pole losowe, tak zwane pole o ruchomej średniej [6]. Jeżeli rozważamy kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia, potencjalne linie poślizgu stają się naturalnymi elementami, wzdłuż których będzie uśredniane pole losowe. Dlatego też w niniejszej pracy uśrednień dokonuje się wzdłuż linii poślizgu; w rezultacie V oznacza odcinek, a $|V|$ jego długość.

Zakładając, że X jest stacjonarnym polem losowym, nowe pole losowe X_V zachowuje tę samą wartość średnią, natomiast jego wariancja ulega redukcji, której wartość zależy od długości i usytuowania danej linii poślizgu. Wariancję nowego pola X_V wyraża się następująco:

$$Var(X_V) = \sigma_V^2 = \gamma(V) \sigma_X^2 \quad (4)$$

gdzie:

$\gamma(V)$ – funkcja wariancji lub funkcja redukcji wariancji, która opisuje zmianę punktowej wariancji σ_x^2 po zastosowaniu procedury uśrednień lokalnych.

Do opisu parametrów c i φ założono lognormalne pola losowe [6]. W każdym z dwóch pól struktura korelacyjna zadana jest przez funkcję kowariancji typu Gaussa, o następującej postaci:

$$R(\Delta x, \Delta z) = \sigma_x^2 \exp \left\{ - \left[\left(\frac{\Delta x}{\omega_2} \right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\omega_1} \right)^2 \right] \right\} \quad (5)$$

gdzie:

$\Delta x, \Delta z$ – odległości odpowiednio na kierunku osi x (poziomej) i z (pionowej).

W celu rozważenia anizotropii przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałościowych rozróżnia się wartości parametrów ω_1 i ω_2 . Ich wartości są związane ze skalą fluktuacji pola [6, 27] w następujący sposób:

$$\omega_1 = \frac{\theta_v}{\sqrt{\pi}}, \quad \omega_2 = \frac{\theta_h}{\sqrt{\pi}} \quad (6)$$

gdzie:

θ_v i θ_h – odpowiednio pionowa i pozioma skala fluktuacji.

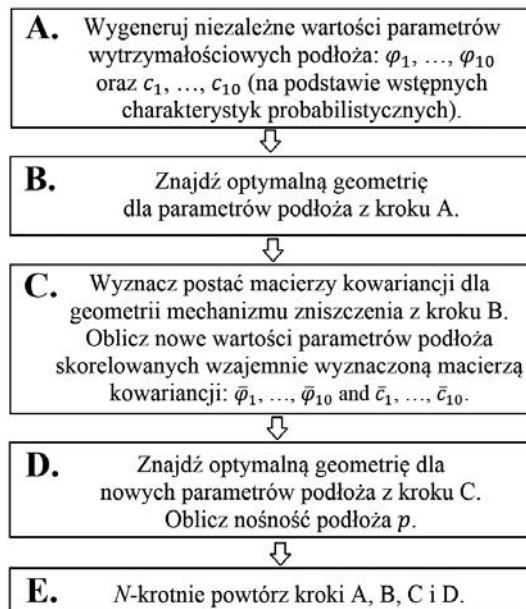
Jak podano powyżej, pole losowe uśrednia się wzdłuż linii poślizgu odpowiadających danemu mechanizmowi zniszczenia. Uśrednianie prowadzi do dyskretyzacji pola losowego w taki sposób, że po uśrednieniu dla danej linii poślizgu l_i otrzymuje się pojedynczą zmienną losową X_{l_i} . Kowariancję pomiędzy dwoma tak wyznaczonymi zmiennymi X_{l_i} i X_{l_j} (odpowiadającymi liniom l_i i l_j) można wyznaczyć z następującego wzoru [20, 21]:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_{l_i}, X_{l_j}) &= \frac{1}{|l_i||l_j|} \int_{l_i} \int_{l_j} R(x_1, z_1, x_2, z_2) dl_i dl_j = \\ &= \frac{1}{|l_i||l_j|} \int_{a_i, a_j}^{b_i, b_j} R(x(t_i), z(t_i), x(t_j), z(t_j)) \times \\ &\times \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_i} \right]^2 + \left[\frac{dz}{dt_i} \right]^2} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_j} \right]^2 + \left[\frac{dz}{dt_j} \right]^2} dt_i dt_j \quad (7) \end{aligned}$$

W całce po odcinku (patrz lewa część równania (7)) l_i oznacza i -ty segment mechanizmu zniszczenia, zaś $x(t_i)$, $z(t_i)$ jego parametryzację. Równość we wzorze (7) wynika z twierdzenia o zamianie całki krzywoliniowej na podwójną. Dla mechanizmu symetrycznego składającego się z n bloków liczba linii poślizgu wynosi $2n-2$. W przypadku niesymetrycznym, liczba ta wynosi odpowiednio $4n-4$. Dla każdej linii poślizgu należy wyprowadzić równanie całkowite na poszczególne wariancje i kowariancje. W ten sposób buduje się macierz kowariancji, której rozmiar dla rozpatrywanego mechanizmu symetrycznego wynosi 10×10 , natomiast dla mechanizmu niesymetrycznego wynosi 20×20 . Na podstawie macierzy kowariancji zgodnie z algorytmem przedstawionym w [21 i 22], uzyskuje się nowe uśrednione wartości parametrów podłoża, różne na każdej z linii poślizgu, natomiast skorelowane ze sobą wyznaczoną macierzą kowariancji.

ALGORYTM NUMERYCZNY

Na potrzeby analiz opracowano nowy algorytm pozwalający na wyznaczanie nośności granicznej w przypadku wielobloko-



Rys. 7. Schemat blokowy opracowanego algorytmu do wyznaczania nośności dla mechanizmu wieloblokowego

wego mechanizmu zniszczenia. Parametry wytrzymałościowe gruntu, takie jak: kąt tarcia wewnętrznego oraz spójność opisano za pomocą lognormalnych pól losowych; uwzględniono anizotropię poprzez przyjęcie różnych wartości poziomej i pionowej skali fluktuacji. W prezentowanym podejściu nie ma konieczności bezpośredniego generowania pola losowego, natomiast, opierając się na właściwościach założonego pola losowego, wyznacza się wartości parametrów jako uśrednioną wartość pola na każdej linii poślizgu. Podczas tego procesu uwzględnia się funkcję kowariancji, skalę fluktuacji, wartość średnią i wariancję pola losowego. Za początek procedury uważa się wygenerowanie na każdej linii poślizgu, w sposób niezależny, wartości parametrów wytrzymałościowych zgodnie z wyjściowymi charakterystykami probabilistycznymi. W związku z uwzględnieniem ciężaru własnego podłoża gruntowego, w celu znalezienia optymalnej geometrii zniszczenia, konieczne jest użycie procedury optymalizacyjnej. Dla ustalonej geometrii zniszczenia wyznacza się macierz kowariancji, przez aplikację procedury lokalnych uśrednień, otrzymując w rezultacie nowe skorelowane wartości parametrów ($\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_{2n-2}$) oraz ($\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{2n-2}$). Ostatecznie procedura optymalizacyjna wykorzystywana jest ponownie dla nowych wartości parametrów. Finalnie otrzymuje się optymalną geometrię zniszczenia oraz wartość nośności podłoża. Całą procedurę powtarza się N razy w ramach metody Monte Carlo, gdzie N dobiera się w taki sposób, aby możliwa była aproksymacja rozkładu prawdopodobieństwa dla nośności. W celu zobrazowania algorytmu zestawiono jego główne elementy na rys. 7. Wszystkie procedury zaimplementowano w środowisku Mathematica [31].

ANALIZY NUMERYCZNE

Algorytm zaprezentowany w rozdziale „Algorytm numeryczny” wykorzystano do przeprowadzenia kilku serii analiz numerycznych, w których rozważono dwa rodzaje podłoża

Tabl. 3. Parametry podłoża gruntowego dla gruntu spoistego. Wartość i odchylenia standardowe wyznaczono dla gruntu analizowanego w [18]

Parametr	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności	Rozkład prawdopodobieństwa
Ciężar objętościowy γ [kN/m ³]	18,2	1,092	0,060	Normalny
Kąt tarcia wewnętrznego ϕ [°]	0,0	–	–	Wartość stała
Wytrzymałość na ścinanie c_u [kPa]	57,7	28,65	0,497	Lognormalne pole losowe
Naprężenie obok fundamentu q [kPa]	14,4	–	–	Wartość stała

Tabl. 4. Parametry podłoża gruntowego dla gruntu mało spoistego

Parametr	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności	Rozkład prawdopodobieństwa
Ciężar objętościowy γ [kN/m ³]	18,2	1,092	0,060	Normalny
Kąt tarcia wewnętrznego ϕ [°]	30,0	4,5	0,150	Lognormalne pole losowe
Spójność c_u [kPa]	5,0	1,0	0,200	Lognormalne pole losowe
Naprężenie obok fundamentu q [kPa]	14,4	–	–	Wartość stała

Tabl. 5. Liczba symulacji dla mechanizmu Prandtla

θ_v [m]	θ_h [m]	Podłoże spoiste		Podłoże mało spoiste	
		$b = 1,0$ m	$b = 2,0$ m	$b = 1,0$ m	$b = 2,0$ m
0,25	0,25	$N = 2000$	$N = 2000$	$N = 2000$	$N = 2000$
	1,25	$N = 2000$	$N = 2000$	$N = 2000$	$N = 2000$
	2,50	$N = 4000$	$N = 4000$	$N = 4000$	$N = 4000$
	7,50	$N = 4000$	$N = 4000$	$N = 4000$	$N = 4000$
0,50	0,50	$N = 3000$	$N = 3000$	$N = 3000$	$N = 3000$
	2,50	$N = 4000$	$N = 4000$	$N = 4000$	$N = 4000$
	5,00	$N = 6000$	$N = 6000$	$N = 6000$	$N = 6000$
	15,00	$N = 6000$	$N = 6000$	$N = 6000$	$N = 6000$
0,75	0,75	$N = 4000$	$N = 4000$	$N = 4000$	$N = 4000$
	3,75	$N = 6000$	$N = 6000$	$N = 6000$	$N = 6000$
	7,50	$N = 8000$	$N = 8000$	$N = 8000$	$N = 8000$
	22,50	$N = 8000$	$N = 8000$	$N = 8000$	$N = 8000$

Tabl. 6. Liczba symulacji dla mechanizmu wieloblokowego i podłoża mało spoistego

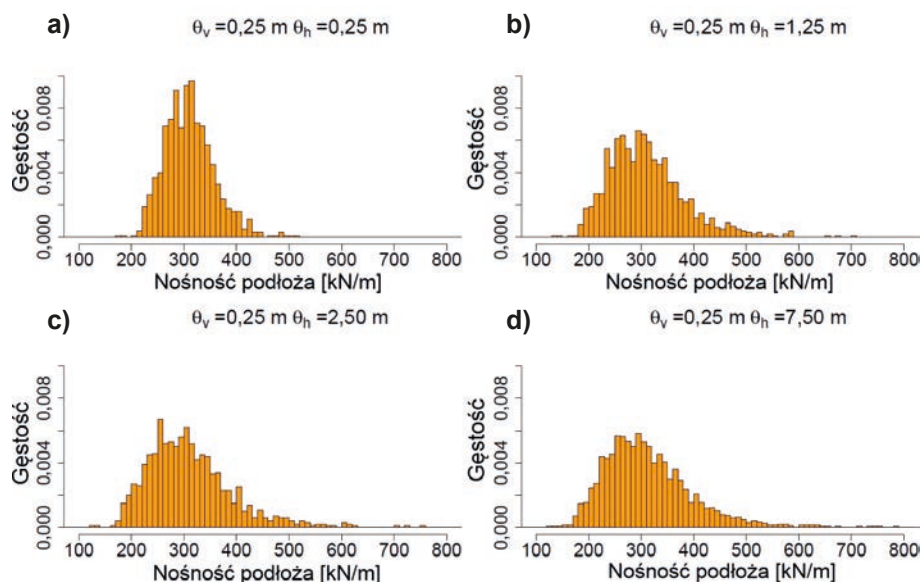
θ_v [m]	θ_h [m]	Mechanizm wieloblokowy			
		Symetryczny		Niesymetryczny	
		$b = 1,0$ m	$b = 2,0$ m	$b = 1,0$ m	$b = 2,0$ m
0,25	0,25	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	1,25	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	2,50	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	7,50	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
0,50	0,50	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	2,50	$N = 1350$	$N = 1000$	$N = 1000$	$N = 1000$
	5,00	$N = 1750$	$N = 1000$	$N = 1500$	$N = 1000$
	15,00	$N = 2000$	$N = 1150$	$N = 1750$	$N = 1000$
0,75	0,75	$N = 1050$	$N = 1000$	$N = 1050$	$N = 1000$
	3,75	$N = 2500$	$N = 1100$	$N = 1900$	$N = 1100$
	7,50	$N = 2600$	$N = 1500$	$N = 2500$	$N = 1050$
	22,50	$N = 3000$	$N = 1700$	$N = 2900$	$N = 1500$

gruntowego. W przypadku podłoża spoistego założono warunki bez odpływu i przeprowadzono analizę przy pomocy zaadaptowanego mechanizmu zniszczenia Prandtla. Parametry opisujące rozpatrywane zagadnienie dla podłoża spoistego zestawiono w tabl. 3. Drugi rodzaj podłoża to podłoże mało spoiste, charakteryzujące się niewielką wartością spójności; parametry tego podłoża zestawiono w tabl. 4. Dla podłoża mało spoistego analizy numeryczne przeprowadzono dla zaadaptowanego mechanizmu wieloblokowego; rozważono mechanizm symetryczny i niesymetryczny.

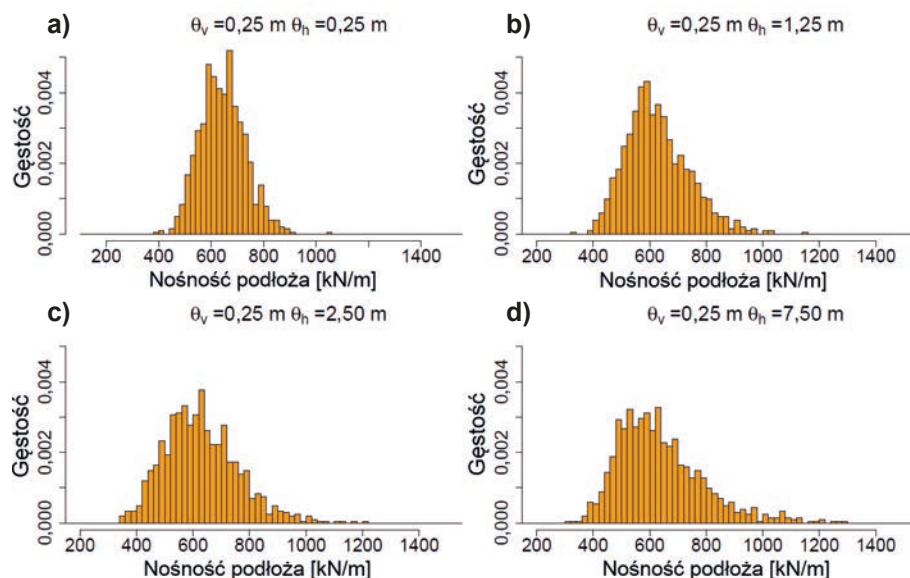
Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla trzech wartości pionowych skal fluktuacji: $\theta_v = 0,25$ m, $\theta_v = 0,50$ m oraz $\theta_v = 0,75$ m. Wartości te przyjęto na podstawie pracy [18]. W związku z brakiem jednoznacznych wyników dotyczących poziomych skal fluktuacji założono cztery wartości θ_h dla każdej z pionowych skal fluktuacji, mianowicie: $\theta_h = \theta_v$, $\theta_h = 5\theta_v$,

$\theta_h = 10\theta_v$ i $\theta_h = 30\theta_v$. Wybrane wartości dotyczą podłoża o izotropowej zmienności przestrzennej parametrów wytrzymałościowych oraz zwiększającej się anizotropii (większa skala fluktuacji w kierunku poziomym). W tabl. 5 i 6 zestawiono informacje o wszystkich wykonanych analizach i podano liczbę symulacji Monte Carlo N przeprowadzonych w celu aproksymacji rozkładów prawdopodobieństwa. Liczbę symulacji N dobrano w taki sposób, aby przedziały ufności dla wartości średniej osiągały w najbardziej niekorzystnych przypadkach wartość maksymalną około 1,5%. Z tego względu N rośnie wraz ze wzrostem poziomej i pionowej skali fluktuacji.

Na rys. 8 przedstawiono przykładowo otrzymane histogramy nośności podłoża dla mechanizmu Prandtla, podłoża spoistego oraz pionowej skali fluktuacji $\theta_v = 0,25$ m. Natomiast na



Rys. 8. Przykładowe histogramy nośności dla podłoża spoiстого, mechanizmu Prandtla, $b = 1,0$ m oraz pionowej skali fluktuacji $0,25$ m; każdy z przedstawionych histogramów dotyczy innej wartości poziomej skali fluktuacji



Rys. 9. Przykładowe histogramy nośności dla podłoża mało spoiстого, symetrycznego mechanizmu wieloblokowego, $b = 1,0$ m oraz pionowej skali fluktuacji $0,25$ m; każdy z przedstawionych histogramów dotyczy innej wartości poziomej skali fluktuacji

rys. 9 przedstawiono analogiczne histogramy dla mechanizmu wieloblokowego symetrycznego i podłoża mało spoiстого.

Zestawienie wartości średnich oraz odchyłeń standardowych nośności podłoża otrzymanych w drodze symulacji zestawiono w tabl. 7 dla mechanizmu Prandtla oraz w tabl. 8 dla mechanizmu wieloblokowego.

WSKAŹNIKI NIEZAWODNOŚCI

Prawdopodobieństwo przekroczenia wyznaczonej nośności podłoża było szacowane na podstawie teoretycznych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa, które dopasowywano do uzyskanych rozkładów empirycznych (numerycznych). We wszystkich

analizowanych przykładach kształt histogramów oraz dystrybuanty empiryczne wskazują, że otrzymane rozkłady nośności podłoża mogą być modelowane za pomocą rozkładów lognormalnych. Jest to pośrednia konsekwencja opisu parametrów wytrzymałościowych gruntu za pomocą lognormalnych pól losowych (patrz tabl. 3 i 4). Do dopasowania rozkładów prawdopodobieństwa wykorzystano pakiet *fitdistr* dostępny w środowisku R, który to pakiet wykorzystuje metodę Nelder-Mead [30]. Jeśli oznaczymy nośność podłoża (rozumianą jako zmienna losowa) aproksymowaną rozkładem lognormalnym jako p_{fit} , wtedy prawdopodobieństwo awarii P_f można zdefiniować w sposób następujący:

$$P_f = P \left\{ p_{fit} < \frac{P_{sr}}{F} \right\} \quad (8)$$

Tabl. 7. Wartości średnie oraz odchylenia standardowe nośności podłoża spoistego otrzymane w przypadku mechanizmu zniszczenia Prandtla

θ_v [m]	θ_h [m]	Podłoże spoiste			
		Mechanizm Prandtla			
		$b = 1,0 \text{ m}$		$b = 2,0 \text{ m}$	
		Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]
0,25	0,25	310,5	47,738	621,3	68,340
	1,25	310,6	74,688	621,3	106,918
	2,50	310,6	81,549	621,4	121,404
	7,50	312,93	84,055	625,3	132,013
0,5	0,50	310,5	65,857	621,1	95,475
	2,50	310,5	96,256	621,2	149,377
	5,00	313,2	99,494	625,7	162,198
	15,0	313,3	100,746	625,9	168,109
0,75	0,75	312,5	78,694	624,3	114,897
	3,75	313,1	108,722	625,2	175,476
	7,50	312,2	111,153	624,0	185,608
	22,5	311,9	111,145	623,3	188,155

gdzie:

p_{sr} – wartość nośności podłoża obliczona dla wartości oczekiwanych (patrz: tabl. 3 i 4),

F – globalny współczynnik bezpieczeństwa. Wskaźnik niezawodności β wyznaczano z klasycznego wzoru:

$$\beta = -\Phi^{-1} \left[P_f \right] \quad (9)$$

gdzie:

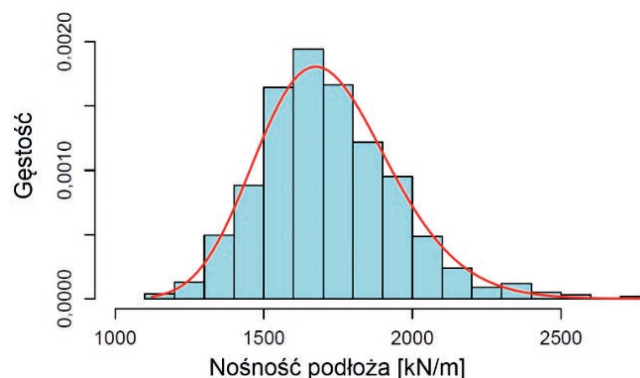
Φ^{-1} – odwrotna dystrybuanta dla standardowego rozkładu normalnego.

WYNIKI ANALIZ

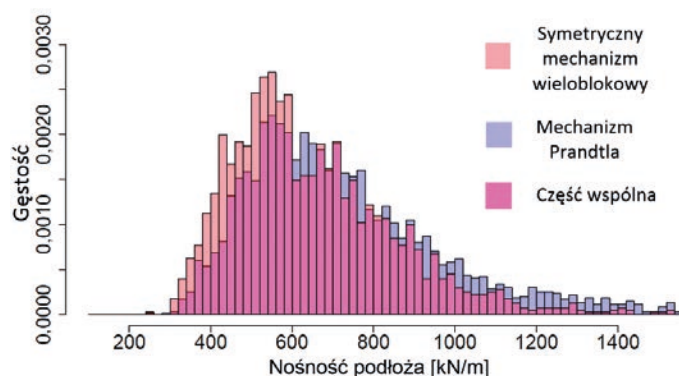
- 1) Na rys. 11 przedstawiono porównanie histogramów nośności otrzymanych w tych samych warunkach podłoża i geometrii fundamentu, ale dla dwóch rodzajów mechanizmów zniszczenia: mechanizmu Prandtla oraz symetrycznego mechanizmu wieloblokowego. Obliczenia przeprowadzono dla podłoża mało spoistego, pionowej skali fluktuacji $\theta_v = 0,50 \text{ m}$, poziomej skali fluktuacji $\theta_h = 15,00 \text{ m}$ oraz szerokości fundamentu $b = 1,0 \text{ m}$. Otrzymana wartość średnia i odchylenie standardowe nośności dla mechanizmu Prandtla wyniosły odpowiednio: 746,3 kN/m oraz 304,6 kN/m. Wyniki uzyskane dla mechanizmu wieloblokowego wynoszą odpowiednio: 654,1 kN/m oraz 219,2 kN/m (tabl. 8). Zastosowanie mechanizmu uwzględniającego ciężar własny podłoża redukuje znacząco wartość średnią oraz odchylenie standardowe nośności. Różnice pomiędzy wynikami obliczeń nośności dwóch mechanizmów widać wyraźnie na rys. 11.

Tabl. 8. Wartości średnie oraz odchylenia standardowe nośności podłoża mało spoistego otrzymane w przypadku mechanizmu wieloblokowego symetrycznego oraz niesymetrycznego

θ_v [m]	θ_h [m]	Podłoże mało spoiste							
		Symetryczny mechanizm wieloblokowy				Niesymetryczny mechanizm wieloblokowy			
		$b = 1,0 \text{ m}$		$b = 2,0 \text{ m}$		$b = 1,0 \text{ m}$		$b = 2,0 \text{ m}$	
		Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]	Wartość średnia [kN/m]	Odchylenie standardowe [kN/m]
0,25	0,25	643,8	85,338	1744,8	171,198	649,1	62,080	1761,7	127,746
	1,25	627,6	112,787	1694,4	239,732	634,2	93,603	1722,9	193,419
	2,50	629,5	131,499	1670,7	258,255	632,6	114,369	1691,0	209,365
	7,50	637,8	153,457	1679,9	304,684	642,8	146,540	1698,2	257,611
0,5	0,50	637,8	130,007	1709,5	242,986	645,8	94,310	1737,3	176,463
	2,50	623,8	174,652	1663,5	353,811	627,4	138,979	1686,4	289,642
	5,00	651,4	209,351	1661,9	394,948	654,0	187,200	1682,6	334,632
	15,0	654,1	219,209	1692,7	443,576	674,5	217,056	1729,7	424,076
0,75	0,75	632,1	151,795	1701,6	312,006	639,2	118,668	1718,9	229,202
	3,75	655,8	238,513	1669,4	427,224	648,2	211,521	1666,1	357,104
	7,50	668,5	257,383	1704,7	511,369	672,2	256,108	1700,7	425,810
	22,5	679,4	271,132	1726,4	539,774	690,0	276,660	1749,2	526,3



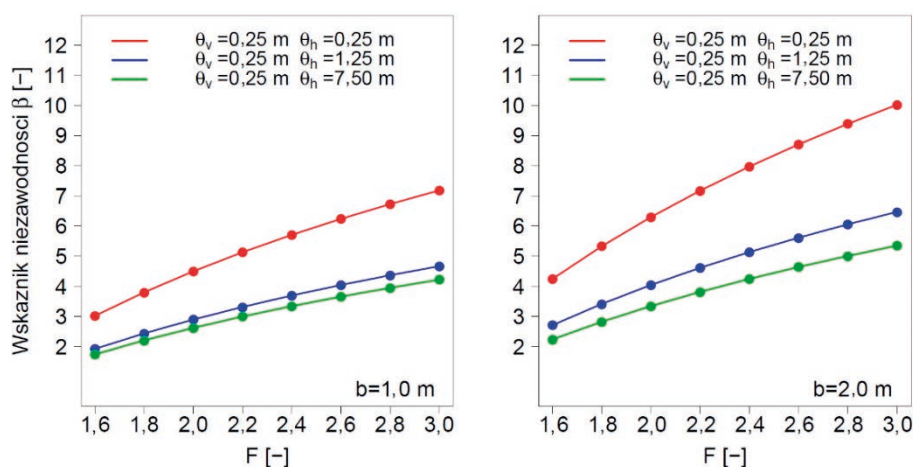
Rys. 10. Przykładowy histogram nośności podłoża i dopasowanie teoretycznego rozkładu lognormalnego, dla podłoża mało spoistego, mechanizmu niesymetrycznego, $b = 2,0$ m, $\theta_v = 0,75$ i $\theta_h = 0,75$



Rys. 11. Porównanie histogramów dla symetrycznego mechanizmu wieloblokowego (liczba realizacji $N = 2000$) oraz mechanizmu Prandtla (liczba realizacji $N = 3000$) dla podłoża mało spoistego

Otrzymane wyniki potwierdzają celowość badań nad wykorzystaniem mechanizmu uwzględniającego ciężar objętościowy. Pomimo „słabości” mechanizmu Prandtla przy większych wartościach kąta tarcia wewnętrznego jest on optymalny dla podłoża idealnie spoistego; dlatego znajduje on zastosowanie w praktycznych zagadnieniach analizy nośności w warunkach bez odpływu.

- 2) Na rys. 12 przedstawiono wskaźniki niezawodności w funkcji globalnego współczynnika bezpieczeństwa F

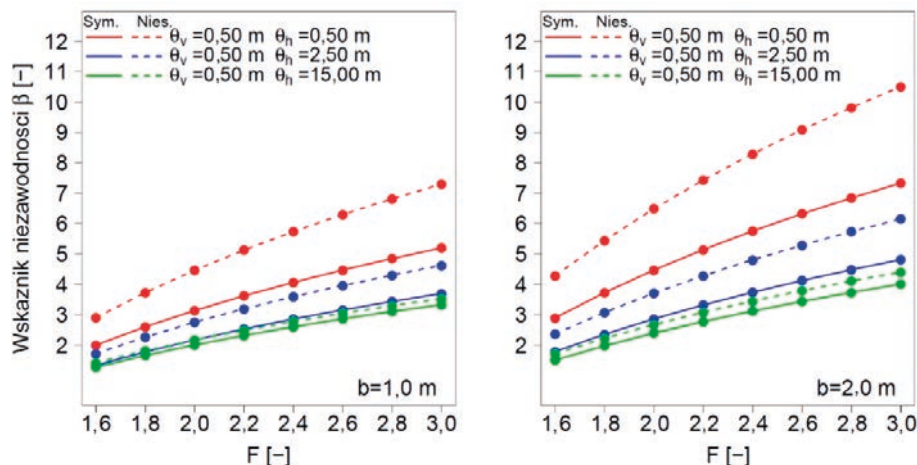


Rys. 12. Wskaźniki niezawodności otrzymane dla mechanizmu Prandtla i warunków bez odpływu w funkcji globalnego współczynnika bezpieczeństwa F przy pionowej skali fluktuacji 0,25 m i trzech wartościach skal poziomych

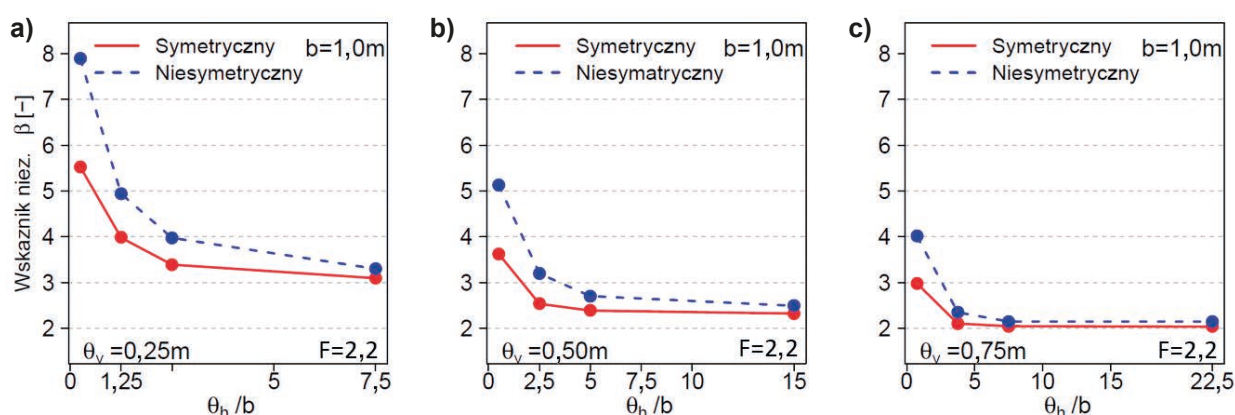
otrzymane w warunkach bez odpływu (patrz: tabl. 3). Analizy tego rodzaju pozwalają wyznaczyć wskaźnik niezawodności ze stosunkowo dużą dokładnością, jeśli znana jest wartość pionowej skali fluktuacji.

Na rys. 12 widać interesującą zależność wpływu wielkości mechanizmu zniszczenia od wartości poziomej skali fluktuacji. Wskutek tego, że średni zasięg poziomy mechanizmu zniszczenia wynosi około 1,0 m od krawędzi fundamentu, na rys. 12 a widać, że zwiększenie wartości poziomej skali fluktuacji 6-krotnie z 1,25 m do 7,5 m nieznacznie wpływa na spadek wartości wskaźników niezawodności, natomiast zwiększenie jej 5-krotnie z 0,25 m do 1,25 m zmienia znacząco ich wartość. Wykres dobrze ilustruje znaczny wpływ przestrzennej zmienności parametrów podłoża gruntowego na bezpieczeństwo fundamentu.

- 3) Analogiczną jak w punkcie 2) analizę przeprowadzono dla mechanizmu wieloblokowego (rys. 13). Rozpatrzone mechanizm symetryczny oraz niesymetryczny. Widać wyraźnie, że dla mechanizmu niesymetrycznego (linie przerywane) uzyskuje się wyższe wartości wskaźników niezawodności. Różnice we wskaźnikach niezawodności pomiędzy dwoma mechanizmami są duże dla małych wartości poziomej skali fluktuacji oraz zmniejszają się szybko wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji. Przedstawione wyniki pokazują istotny wpływ poziomej skali fluktuacji na wartości wskaźników niezawodności. Należy wspomnieć, że obecnie nadal nie ma wypracowanych metod wiarygodnego wyznaczania wartości poziomych skal fluktuacji na podstawie, na przykład, sondaży statycznych. W świetle wyników przedstawionych na rys. 12 i 13, w takiej sytuacji najbardziej konserwatywnym podejściem jest założenie nieskończonego zasięgu korelacji na kierunku poziomym.
- 4) Na rys. 14 przedstawiono wpływ pionowej i poziomej skali fluktuacji na wartości wskaźników niezawodności i pokazano wyniki mechanizmu symetrycznego i niesymetrycznego. Na rys. 14 a, b i c przedstawiono otrzymane wskaźniki niezawodności dla pionowej skali fluktuacji: 0,25 m, 0,50 m i 0,75 m. Dla każdej wartości pionowej skali fluktuacji przeprowadzono analizę przy czterech



Rys. 13. Wskaźniki niezawodności otrzymane dla mechanizmu wieloblokowego symetrycznego i niesymetrycznego w funkcji globalnego współczynnika bezpieczeństwa F , dla pionowej skali fluktuacji 0,50 m i trzech wartości skal poziomych



Rys. 14. Otrzymane wskaźniki niezawodności w funkcji poziomej skali fluktuacji (θ_h/b) dla mechanizmu symetrycznego i niesymetrycznego
a) $\theta_v = 0,25$ m, b) $\theta_v = 0,50$ m, c) $\theta_v = 0,75$ m

wartościach poziomych skal fluktuacji, począwszy od przypadku izotropowego. Przedstawione wyniki otrzymano dla szerokości fundamentu $b = 1,0$ m oraz globalnego współczynnika bezpieczeństwa $F = 2,2$.

Powyższe wyniki wskazują na niezwykle silny wpływ pionowej skali fluktuacji na wartość wskaźników niezawodności. Na rys. 14 widać także wpływ względnego rozmiaru mechanizmu zniszczenia (zależnego od szerokości fundamentu b) w stosunku do poziomej skali fluktuacji. Gdy stosunek poziomej skali fluktuacji do szerokości fundamentu jest większy od około 5 ($\theta_h/b > 5$), praktycznie nie obserwuje się wpływu wartości poziomej skali fluktuacji na wskaźniki niezawodności. Na rys. 14 pokazano efekt „zbliżania się” mechanizmu niesymetrycznego do mechanizmu symetrycznego w zakresie wskaźników niezawodności. Przy dużych wartościach poziomych skal fluktuacji obydwa podejścia dają praktycznie takie same wyniki, jednakże, gdy rozważymy relatywnie krótkie skale poziome $\theta_h < 2\theta_v$, różnice pomiędzy obydwo ma mechanizmami są znaczące.

- 5) Korzystając z powyższych analiz, pokazano efektywność zaproponowanego algorytmu do analiz losowej nośności podłoża oraz możliwość jego użycia do szacowania wartości wskaźników niezawodności. Co więcej, otrzyma-

ne wyniki wskazują, jak istotny jest rozwój interpretacji wyników i metod pozwalających na szacowanie wartości skal fluktuacji na podstawie, na przykład, sondowań CPT. Pokazano także, że użycie zaproponowanego przez autorów niesymetrycznego mechanizmu zniszczenia, który lepiej odzwierciedla podłoże o właściwościach przestrzennie zmiennych, może mieć istotny wpływ na wartość uzyskanych wskaźników niezawodności. Przy relatywnie krótkich poziomych skalach fluktuacji, wykorzystanie niesymetrycznego mechanizmu zniszczenia może przyczynić się do bardziej ekonomicznego projektowania wymiarów fundamentów.

LITERATURA

1. Ali A., Lyamin A. V., Huang J., Sloan S. W., Cassidy M. J.: Effect of Spatial Correlation Length on the Bearing Capacity of an Eccentrically Loaded Strip Footing. 6th APSSRA 2016, 311-316.
2. Bagińska I., Kawa M., Janecki W.: Estimation of spatial variability of lignite mine dumping ground soil properties using CPTu results. *Studia Geotechnica et Mechanica*, 2016, 38, 1.
3. Beacher, G.B., Christian, J. T.: Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering, Wiley, 2003.

4. Chen W. F.: Limit Analysis and Soil Plasticity, Elsevier, 1975.
5. Cherubini C.: Data and consideration on the variability of geotechnical properties of soils, Proc. of the ESREL Conf. Lisboa, 1997, 1538-1591.
6. Fenton G. A., Griffiths D. V.: Risk Assessment in Geotechnical Engineering, Wiley, 2008.
7. Huang J., Lyamin A. V., Griffiths D. V., Sloan S. W., Krabbenhoft K., Fenton G. A.: Undrained bearing capacity of spatially random clays by finite elements and limit analysis. Proceedings of the 18th ICSMGE, Paris 2013, 731-734.
8. ISO 2394:2015, General principles on reliability for structures. Fourth edition.
9. Izicki R., Mróz Z.: Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skał. Warszawa 1976, Polska Akademia Nauk.
10. Jaksa M. B., Kaggawa W. S., Brooker P. I.: Experimental evaluation of the scale of fluctuation of a stiff clay, ICASP8, Int. Conf. on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, At Sydney, Vol. 1, 415-422.
11. Kawa M., Łydźba D.: Evaluation of bearing capacity of strip footing using random layers concept. *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol. 37, No. 3, 2015.
12. Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P.: Optimization by Simulated Annealing, *Science*, 1983, 220, 671-680.
13. Kirkpatrick S.: Optimization by Simulated Annealing: Quantitative Studies. *Journal of Statistical Physics*; 1984; Vol. 34, Nos. 5/6.
14. Low B.K., Phoon K. K.: Reliability based design and its complementary role to Eurocode 7 design approach, *Computers and Geotechnics*, 2015, 65, 30-44.
15. Lumb P.: The variability of natural soils. *Canadian Geotechnical Journal*, 1966, vol. 3, no 2, 74-97.
16. Łydźba D., Różański A.: Microstructure measures and the minimum size of a representative volume element: 2D numerical study. *Acta Geophysica*, 2016, 62(5), 1060-1086.
17. Michalowski R. L.: An estimate of the influence of soil weight on bearing capacity using limit analysis. *Soils and Foundations*, 1997, 37, No. 4, 57-64.
18. Pieczyńska-Kozłowska J. M., Puła W., Vessia G.: A collection of fluctuation scale values and autocorrelation functions of fine deposits in Emilia Romagna Palin, Italy, *Geo-Risk* 2017, Reston, American Society of Civil Engineers, cop. 2017, 290-299.
19. Prandtl L.: Über die Harte plastischer Körper. *Nachr Kgl Ges Wiss Göttingen*.
20. Puła W.: Zastosowania teorii niezawodności konstrukcji do oceny bezpieczeństwa fundamentów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2004.
21. Puła W., Chwała M.: On spatial averaging along random slip lines in the reliability computations of shallow strip foundations. *Computers and Geotechnics*, 2015, 68, 128-136.
22. Puła W., Chwała M.: Random bearing capacity evaluation of shallow foundations for asymmetrical failure mechanism with spatial averaging and self-weight of soil included (Praca złożona w czasopiśmie *Computers and Geotechnics*).
23. Puła W., Zaskórski Ł.: On some methods in safety evaluation in geotechnics, *Studia Geotechnica et Mechanica*, 2015, Vol. 37, No.2.
24. Sobótka M., Łydźba D., Różański A.: (2013). Shape optimization of underground excavation by simulated annealing. *Studia Geotechnica et Mechanica*, 35(1), 209-218.
25. Sobótka M., Pachnicz M.: Shape optimization of road tunnel cross-section by simulated annealing. *Studia Geotechnica et Mechanica* 2016, 38, No. 2, 47-52.
26. Stefaniuk D., Różański A., Łydźba D.: (2016). Recovery of microstructure properties: random variability of soil solid thermal conductivity. *Studia Geotechnica et Mechanica*, 38(1), 99-107.
27. Vanmarcke E. H.: Random fields – analysis and synthesis. Cambridge: MIT Press, 1983.
28. Vanmarcke E. H.: Probabilistic modelling of soil profiles. *J Geotech Eng Div*, 1977,103(GT11), 1227-46.
29. Vanmarcke E. H.: Reliability of earth slopes. *J Geotech Eng Div* 1977,103(GT11), 1247-65.
30. Venables W. N., Ripley B. D.: Modern Applied Statistics with S. Fourth edition. Springer, 2002.
31. Wolfram Research, Inc.: Mathematica, Version 8.0, Champaign, IL (2010).