

Modelowanie przemieszczeń pionowych mieszaną, ortogonalną metodą najmniejszych kwadratów (*Mixed Total Least Squares*)

Prof. dr hab. inż. Waldemar Kamiński

Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska

STANDARDOWA METODA NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW

Rozwój nowych technologii budowlanych umożliwiających projektowanie niestandardowych, futurystycznych konstrukcji inżynierskich, wymusza doskonalenie istniejących i tworzenie nowych metod opracowania wyników pomiarów geodezyjnych stosowanych w geodezji inżynierskiej. Geodezji inżynierskiej, której zadaniem jest geodezyjna obsługa budowy, montażu i monitoringu obiektów inżynierskich. Jak wiadomo standardowym opracowaniem wyników pomiarów geodezyjnych jest bardzo dobrze znana metoda najmniejszych kwadratów. Uzyskane tą metodą estymatory wraz z odpowiadającymi im macierzami kowariancji są wykorzystywane do oceny dokładności pomiarów geodezyjnych, jak również poszukiwanych parametrów. Poszukiwanymi estymatorami mogą być między innymi: współrzędne płaskie punktów X, Y lub wysokości Z (H , lub h), przemieszczenia poziome i pionowe itp. Indywidualne wartości przemieszczeń poziomych lub pionowych, liczone jako różnice odpowiednich współrzędnych, można potraktować jako pseudo obserwacje (czyli zmienne losowe nie będące wynikami bezpośrednich obserwacji) i następnie wykorzystać w procesie modelowania obiektu budowlanego traktowanego jako bryła sztywna. Współczynniki funkcji matematycznych wykorzystane w procesie modelowania badanego obiektu budowlanego można także wyznaczyć standardową metodą najmniejszych kwadratów (SMNK). W ostatnich latach istotnego znaczenia w opracowaniu wyników pomiarów nabiera ortogonalna metoda najmniejszych kwadratów, nazywana w pracach angielskojęzycznych *Total Least Squares* (TLS). W metodzie TLS założono możliwość wystąpienia w zmiennych oraz współczynnikach przy zmiennych losowych błędów przypadkowych (*errors-in-variables* – EIV). Z praktyki geodezyjnej wiadomo jednak, że istnieją modele matematyczne, w których oprócz zmiennych występują, także nie zawierające żadnego elementu losowości, elementy deterministyczne. Wielkości te przypisują zdarzeniu konkretny stan określony za pomocą stałych wielkości liczbowych – skalarów. Przykładem może być tutaj proces modelowania powierzchni obiektu, w którym wykorzystywane są na przykład funkcje wielomianowe. Przyjęcie założenia o istnieniu w opracowywanym zbiorze obserwacji, pseudo obserwacji oraz współczynników przy zmiennych elementach losowych i deterministycznych umożliwia zastosowanie pewnego uproszczenia w estymacji ortogonalną metodą najmniejszych kwadratów. W angielskojęzycznej literaturze przedmiotu sposób ten jest nazywany *Mixed Total Least Squares* (MTLS). W tłumaczeniu na język polski MTLS to – mieszaną, ortogonalną metodą najmniejszych kwadratów. W niniejszej pracy zaproponowano wykorzystanie metody MTLS do modelowania przemieszczeń pionowych. Rozważania teoretyczne uzupełniono praktycznym przykładem wykorzystania na rzeczywistych i symulowanych wynikach pomiarów przemieszczeń nabrzeża kanału portowego.

Istotnym zadaniem współczesnej geodezji inżynierskiej jest także proces wyznaczania przemieszczeń i odkształceń obiektów budowlanych. Istota tych zadań polega między innymi na zapewnieniu bezpieczeństwa funkcjonowania obiektu budowlanego, jak również osób przebywających w tym obiekcie. Do wyznaczania przemieszczeń można wykorzystać pomiary geodezyjne wykonywane na przykład: technologiami satelitarnymi GNSS, tachimetrami elektronicznymi, skanerami laserowymi, niwelatorami, dronami oraz metody nazywane umownie fizycznymi, wykorzystującymi na przykład: pochylomierze, szczelinomierze, inklinometry, wahadła fizyczne, tensometry, czujniki zegarowe, i inne. Wykonując pomiary w punktach kontrolowanych o wyznaczonych współrzędnych X, Y oraz traktując badany obiekt jako ciało sztywne, możemy przeprowadzić proces modelowania matematycznego uzyskanych wielkości. Modelowanie można także przeprowadzić w przypadku pseudo obserwacji (przetworzonych wielkości obserwowanych), na przykład przemieszczeń poziomych lub pionowych. W procesie tworzenia modelu przemieszczeń można wykorzystać jakąś funkcję matematyczną, na przykład często stosowaną w obliczeniach funkcję wielomianową. Prawidłowy dobór takiej funkcji umożliwia wyznaczenie (interpolację, ekstrapolację) wartości przemieszczeń w punktach (miejscach), które z różnych względów były niedostępne do pomiaru, na przykład zasłonięte, zastawione, itp.

Wyznaczając przemieszczenia należy wykonać obserwacje i odpowiednie obliczenia w co najmniej dwóch epokach pomiarowych. Metodami geodezyjnymi najczęściej wyznaczone są w kolejnych epokach pomiarowych współrzędne prostokątne punktów kontrolowanych $X_i^l, Y_i^l, Z_i^l, l = 1, \dots$ – kolejne epoki pomiarowe, $i = 1, \dots, m$ – liczba punktów kontrolowanych. Przyjmując, że $\hat{\mathbf{X}} = [\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i]^T$, (gdzie $\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i$ – estymatory współrzędnych punktów kontrolowanych otrzymane na przykład SMNK) możemy wyznaczyć przemieszczenia poziome i pionowe z następujących zależności: $d_{\hat{X}_i} = \hat{X}_i^{l+1} - \hat{X}_i^l, d_{\hat{Y}_i} = \hat{Y}_i^{l+1} - \hat{Y}_i^l, d_{\hat{Z}_i} = \hat{Z}_i^{l+1} - \hat{Z}_i^l$. Umożliwiająca ocenę dokładności uzyskanych wielkości $\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i$, otrzymaną ze SMNK, macierz kowariancji wektora parametrów oznaczmy $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}}^l$ (epoka pierwotna) oraz odpowiednio $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}}^{l+1}$ (epoka wtórna, aktualna). Możemy zapisać, że wektor przemieszczeń $\tilde{\mathbf{d}} = [d_{\hat{X}_1}, d_{\hat{Y}_1}, d_{\hat{Z}_1}, \dots, d_{\hat{X}_m}, d_{\hat{Y}_m}, d_{\hat{Z}_m}]^T$, z estymowaną macierzą kowariancji $\hat{\mathbf{C}}_{\tilde{\mathbf{d}}} = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}}^{l+1} + \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{X}}}^l$. Jakkolwiek proces modelowania przemieszczeń można zrealizować oddzielnie dla przemieszczeń poziomych i przemieszczeń pionowych, jak również łącznie w wymiarze 3D, to w niniejszej pracy w szczegółowych

analizach wykorzystamy jedynie przemieszczenia pionowe (problematyka przemieszczeń poziomych będzie treścią innego opracowania). Przemieszczenia pionowe mogą być spowodowane między innymi: lokalizacją obiektów budowlanych w niekorzystnych warunkach geologicznych, w głębokich wykopach wykonywanych na potrzeby budowy na przykład metra, tuneli, garaży podziemnych itp., zmianą poziomu wody gruntowej oraz innymi przyczynami.

Wektor pseudo obserwacji $\tilde{\mathbf{d}} = [d_{z1}, \dots, d_{zi}, \dots, d_{zm}]^T$, traktując badany obiekt jako ciało sztywne, może być wykorzystany w procesie modelowania powierzchni przemieszczeń pionowych. Do modelowania można zastosować na przykład równanie wielomianowe o postaci

$$d_{zi} = a_0 + a_1 X_i + a_2 Y_i + a_3 X_i^2 + a_4 Y_i^2 + a_5 X_i Y_i + \dots \quad (1)$$

gdzie:

a_0, a_1, a_2 – współczynniki wielomianu,

X_i, Y_i – współrzędne punktów kontrolowanych,

$i = 1, \dots, m$, (m – liczba punktów kontrolowanych).

Często w procesie modelowania wykorzystuje się model płaszczyzny, w postaci

$$d_{zi} = a_0 + a_1 X_i + a_2 Y_i \quad (2)$$

Współczynniki a_0, a_1, a_2 – można wyznaczyć SMNK.

Przyjmując, że wektor parametrów $\mathbf{t} = [a_0, a_1, a_2]^T$, wektor poprawek do przemieszczeń pionowych $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1, \dots, \delta_m]^T$ oraz ma-

trix współczynników $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1, & X_1, & Y_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1, & X_m, & Y_m \end{bmatrix}$, równanie poprawek

możemy zapisać następująco

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{H}\mathbf{t} - \tilde{\mathbf{d}} \quad (3)$$

Poszukując rozwiązania problemu (3), SMNK, zadanie wyrównawcze przyjmie postać

$$\psi = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{P}_d \boldsymbol{\delta} = \min \quad (4)$$

gdzie:

$\mathbf{P}_d = \mathbf{Q}_d^{-1}$ – macierz wag przemieszczeń pionowych ($\mathbf{P}_d^{-1} = \mathbf{Q}_d$),

$\mathbf{Q}_d$ – macierz kofaktorów.

Rozwiązaniem problemu (4) jest estymator

$$\hat{\mathbf{t}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{P}_d \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{P}_d \tilde{\mathbf{d}} \quad (5)$$

Macierz kowariancji $\hat{\mathbf{C}}_t$ wektora $\hat{\mathbf{t}}$ przedstawiona jest w następującej postaci

$$\hat{\mathbf{C}}_t = m_0^2 \mathbf{Q}_t \quad (6)$$

gdzie macierz kofaktorów $\mathbf{Q}_t$ ma postać

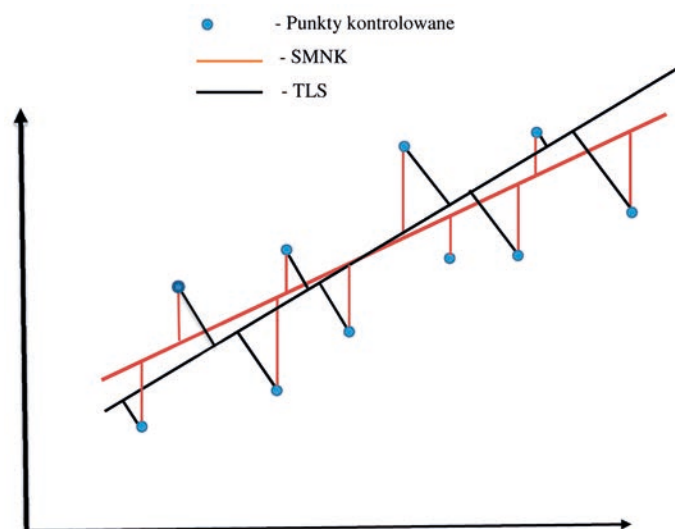
$$\mathbf{Q}_t = (\mathbf{H}^T \mathbf{P}_d \mathbf{H})^{-1} \quad (7)$$

Wektor estymatorów poprawek $\hat{\boldsymbol{\delta}} = [\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_m]^T$ obliczymy z następującej zależności

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{t}} - \tilde{\mathbf{d}} \quad (8)$$

Macierz kowariancji wektora poprawek ma postać

$$\mathbf{C}_\delta = m_0^2 \mathbf{Q}_\delta \quad (9)$$



Rys. 1. Standardowa metoda NK i Total Least Squares

w której macierz kofaktorów

$$\mathbf{Q}_\delta = \mathbf{P}_d - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{P}_d \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \quad (10)$$

Estymator współczynnika wariancji $\hat{\sigma}_0^2 = m_0^2$ wyznaczmy z następującej zależności

$$m_0^2 = \frac{\hat{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{P}_d \hat{\boldsymbol{\delta}}}{f} \quad (11)$$

gdzie:

$f = m - m_r$ – liczba obserwacji nadliczbowych,

m_r – liczba parametrów wynikająca z przyjętego modelu wielomianowego (w niniejszej pracy $\mathbf{t} = [a_0, a_1, a_2]^T$, stąd $m_r = 3$).

Jak już wspomniano w obliczeniach można także zastosować TLS. Różnicę pomiędzy standardową metodą najmniejszych kwadratów (SMNK) a ortogonalną metodą najmniejszych kwadratów (TLS) graficznie przedstawiono na rys. 1.

Z przedstawionego rysunku wynika, że TLS jest rzutem ortogonalnym mierzonych punktów na prostą. Jak wiadomo rzut ortogonalny jest najkrótszą odległością pomiędzy punktem a prostą, stąd jest to najkorzystniejsze wpasowanie prostej (płaszczyzny) w zbiór punktów.

W następnym rozdziale przedstawimy w skrócie podstawy teoretyczne pewnego sposobu estymacji TLS, a mianowicie mieszanej ortogonalnej metody najmniejszych kwadratów MTLS.

MIXED TOTAL LEAST SQUARES

Założmy, że występujące w zależności (2), zmienne – współrzędne płaskie X_i, Y_i , ($i = 1, \dots, m$), są wyznaczone z pewnymi błędami przypadkowymi $\vartheta_{x1}, \vartheta_{y1}$. Możemy więc zapisać na przykład [6]

$$\begin{bmatrix} 1, & X_1 + \vartheta_{x1}, & Y_1 + \vartheta_{y1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1, & X_m + \vartheta_{xm}, & Y_m + \vartheta_{ym} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & X_1, & Y_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1, & X_m, & Y_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0, & \vartheta_{x1}, & \vartheta_{y1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, & \vartheta_{xm}, & \vartheta_{ym} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{H} + \mathbf{E}_R$$

Stąd w miejsce zależności (3) uzyskamy następujący model funkcjonalny

$$\delta = \mathbf{A} \mathbf{t} - \tilde{\mathbf{d}} = (\mathbf{H} + \mathbf{E}_R) \mathbf{t} - \tilde{\mathbf{d}} \quad (13)$$

Natomiast model statystyczny przyjmie tutaj postać następującą

$$\begin{bmatrix} \delta \\ \mathbf{E}_R \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \delta \\ \boldsymbol{\mu}_A = \text{vec}(\mathbf{E}_R) \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, m_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_R \end{bmatrix} \right) \quad (14)$$

gdzie:

$\boldsymbol{\varepsilon}_R = \text{vec}(\mathbf{E}_R)$ – wektor utworzony z kolumn macierzy $\mathbf{E}_R$ ustawionych jedna pod drugą od strony lewej do prawej,

N – notacja rozkładu normalnego o parametrach

$$N \left(\begin{bmatrix} E(\delta) = \mathbf{0} \\ E(\mathbf{E}_R) = \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = m_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_R \end{bmatrix} \right)$$

$E(\bullet)$ – wartość oczekiwana,

$\mathbf{C}$ – macierz kowariancji,

$\mathbf{Q}_R$ – macierz kofaktorów zmiennych ($\mathbf{P}_R = \mathbf{Q}_R^{-1}$ – macierz wag).

Do rozwiązania równania (13) możemy wykorzystać dwie główne strategie. Jedną z nich jest metoda bezpośrednia polegająca na dekompozycji Cholesky’ego (*Cholesky factorization*) lub rozkładzie według wartości osłbiwych (*singular value decomposition* – SVD), na przykład: [1, 2, 4, 5, 7, 11, 13]. Inna, często stosowana i wykorzystana strategia w niniejszej pracy polega na wykorzystaniu funkcji Lagrange’a, na przykład [3, 9, 10, 11, 12, 13]. W dalszej części pracy w szczegółowych analizach numerycznych będziemy wykorzystywali funkcję Lagrange’a.

Funkcję celu metody TLS możemy przedstawić następującą zależnością

$$\Phi = \begin{bmatrix} \delta^T & \boldsymbol{\varepsilon}_R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta \\ \boldsymbol{\varepsilon}_R \end{bmatrix} \quad (15)$$

Na podstawie tej funkcji oraz modelu funkcjonalnego (13), a także modelu statystycznego (14) możemy sformułować następujący problem optymalizacyjny

$$\left. \begin{aligned} \delta^T \mathbf{P}_d \delta + \boldsymbol{\varepsilon}_R^T \mathbf{P}_R \boldsymbol{\varepsilon}_R &= \min \\ \delta &= (\mathbf{H} + \mathbf{E}_R) \mathbf{t} - \tilde{\mathbf{d}} \\ \mathbf{C}_d &= m_0^2 \mathbf{Q}_d = m_0^2 \mathbf{P}_d^{-1} \\ \mathbf{C}_R &= m_0^2 \mathbf{Q}_R = m_0^2 \mathbf{P}_R^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Należy także wspomnieć, że istnieją sytuacje, w których macierz współczynników $\mathbf{H}$ – o wymiarze $n \times m$ (n – liczba wierszy, m – liczba kolumn) jest złożona z podmacierzy $\mathbf{H}_1$, o wymiarze $n \times p$, zawierającej elementy stałe, które nie są losowe oraz podmacierzy $\mathbf{H}_2$, o wymiarze $n \times (m - p)$ zawierającej elementy losowe (błędy przypadkowe) $\mathbf{E}_R$. Stąd możemy zapisać [14]

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + (\mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_R) \quad (17)$$

W dalszych naszych rozważaniach przyjmujemy, że pierwsze p kolumn nie zawiera błędów przypadkowych, natomiast pozostałe $(m - p)$ kolumn macierzy współczynników zawiera błędy przypadkowe.

Postać elementów podmacierzy $\mathbf{H}_1$ może wynikać z przyjętego w obliczeniach modelu, na przykład jak w niniejszej pracy zależność (2), $\tilde{d}_{zi} = a_0 + a_1 X_i + a_2 Y_i$, w której parametr a_0 poprzedza współczynnik o wartości 1. Wykorzystując powyższe rozważania, możemy zatem zapisać

$$\delta = \mathbf{H}_1 \mathbf{t}_1 + (\mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_R) \mathbf{t}_2 - \tilde{\mathbf{d}} \quad (18)$$

gdzie

$\mathbf{H}_1$ – podmacierz stała o wymiarze $n \times p$, (n – liczba wierszy, p – liczba kolumn),

$\mathbf{t}_1$ – wektor parametrów o wymiarze $p \times 1$,

$\mathbf{H}_2$ – podmacierz losowa o wymiarze $n \times (m - p)$,

$\mathbf{t}_2$ – wektor parametrów o wymiarze $(m - p) \times 1$,

$\mathbf{E}_R$ – część losowa o wymiarze $n \times (m - p)$,

$\tilde{\mathbf{d}}$ – wektor poprawek $n \times 1$,

$\tilde{\mathbf{d}}$ – wektor przemieszczeń pionowych o wymiarze $n \times 1$.

Ponieważ $\text{vec}(\mathbf{E}_R) = \boldsymbol{\varepsilon}_R$, stąd $\mathbf{E}_R \mathbf{t}_2 = (\mathbf{t}_2^T \otimes \mathbf{I}_n) \boldsymbol{\varepsilon}_R$, zadanie wyrównawcze MTLs przyjmie postać następującą

$$\left. \begin{aligned} \delta^T \mathbf{P}_d \delta + \boldsymbol{\varepsilon}_R^T \mathbf{P}_R \boldsymbol{\varepsilon}_R &= \min \\ \delta &= \mathbf{H}_1 \mathbf{t}_1 + (\mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_R) \mathbf{t}_2 - \tilde{\mathbf{d}} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

W celu uzyskania rozwiązania zadania optymalizacyjnego (19) możemy wykorzystać funkcję Lagrange’a, uzyskując wtórny problem optymalizacyjny o postaci

$$\begin{aligned} \Omega(\delta, \boldsymbol{\varepsilon}_R, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \boldsymbol{\lambda}) &= \\ &= \delta^T \mathbf{P}_d \delta + \boldsymbol{\varepsilon}_R^T \mathbf{P}_R \boldsymbol{\varepsilon}_R + 2 \boldsymbol{\lambda}^T R(\delta, \boldsymbol{\varepsilon}_R, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \boldsymbol{\lambda}) = \min \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} R(\delta, \boldsymbol{\varepsilon}_R, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \boldsymbol{\lambda}) &= \delta - \mathbf{H}_1 \mathbf{t}_1 + (\mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_R) \mathbf{t}_2 - \tilde{\mathbf{d}} = \\ &= (\mathbf{H}_1 \mathbf{t}_1 + \mathbf{H}_2 \mathbf{t}_2 + (\mathbf{t}_2^T \otimes \mathbf{I}_n) \boldsymbol{\varepsilon}_R - \tilde{\mathbf{d}} - \delta) \end{aligned} \quad (21)$$

oraz $\boldsymbol{\lambda}$ – wektor mnożników Lagrange’a.

Problem optymalizacyjny $\Omega(\delta, \boldsymbol{\varepsilon}_R, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \boldsymbol{\lambda}) = \min$ rozwiązują takie wielkości $\hat{\delta}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_R, \hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2, \hat{\boldsymbol{\lambda}}$, które spełniają następujące warunki Eulera-Lagrange’a, na przykład [9, 11, 12]

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial \hat{\delta}} \right|_{\hat{\delta}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_R, \hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2, \hat{\boldsymbol{\lambda}}} = 2 \mathbf{P}_d \hat{\delta} - 2 \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \Rightarrow \hat{\delta} = \mathbf{P}_d \hat{\boldsymbol{\lambda}} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_R} \right|_{\hat{\delta}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_R, \hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2, \hat{\boldsymbol{\lambda}}} &= 2 \mathbf{P}_R \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_R + 2 (\hat{\mathbf{t}}_2^T \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_R = -\mathbf{P}_R (\hat{\mathbf{t}}_2^T \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial \hat{\mathbf{t}}_1} \right|_{\hat{\delta}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_R, \hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2, \hat{\boldsymbol{\lambda}}} = 2 \mathbf{H}_1^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial \hat{\mathbf{t}}_2} \right|_{\hat{\delta}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_R, \hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2, \hat{\boldsymbol{\lambda}}} = 2 \mathbf{H}_2^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} + 2 \mathbf{E}_R^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \hat{\boldsymbol{\lambda}}} \right|_{\hat{\delta}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_R, \hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2, \hat{\boldsymbol{\lambda}}} &= 2 (\mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{t}}_1 + \mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{t}}_2 + (\hat{\mathbf{t}}_2^T \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_R - \tilde{\mathbf{d}} - \hat{\delta}) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{t}}_1 + \mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{t}}_2 - (\hat{\mathbf{t}}_2^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{P}_R (\hat{\mathbf{t}}_2^T \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\boldsymbol{\lambda}} - \tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{P}_d \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{Q}_1^{-1} (\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{t}}_1 - \mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{t}}_2) \quad (27)$$

gdzie

$$\mathbf{Q}_1 = (\hat{\mathbf{t}}_2^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{P}_R (\hat{\mathbf{t}}_2^T \otimes \mathbf{I}_n) + \mathbf{P}_d \quad (28)$$

Wstawiając (27) do (24), uzyskamy

$$-\mathbf{H}_1^T \mathbf{Q}_1^{-1} \tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{H}_1^T \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{t}}_1 + \mathbf{H}_1^T \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{0} \quad (29)$$

$$\hat{\mathbf{t}}_1 = (\mathbf{H}_1^T \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{H}_1^T \mathbf{Q}_1^{-1} (\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{t}}_2) \quad (30)$$

Wstawiając zależność (27) do równania (25) oraz dokonując przekształceń macierzowych [6], otrzymamy

$$\mathbf{Q}_3 = \mathbf{H}_2^T \mathbf{Q}_1^{-1} (\mathbf{I}_n - \mathbf{H}_1 (\mathbf{H}_1^T \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{H}_1^T \mathbf{Q}_1^{-1}) \quad (31)$$

Ponieważ [6], $\bar{\mathbf{H}}_2^T \hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\mathbf{I}_p \otimes \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T) \hat{\mathbf{e}}_R$, stąd

$$\hat{\mathbf{t}}_2 = (\mathbf{Q}_3 \mathbf{H}_2)^{-1} [\mathbf{Q}_3 \tilde{\mathbf{d}} - (\mathbf{I}_p \otimes \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T) \hat{\mathbf{e}}_R] \quad (32)$$

Wstawiając równanie (32) do zależności (30), otrzymamy

$$\hat{\mathbf{t}}_1 = (\mathbf{H}_1^T \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{H}_1^T \mathbf{Q}_1^{-1} \left\{ [\mathbf{I} - \mathbf{H}_2 (\mathbf{Q}_3 \mathbf{H}_2)^{-1} \mathbf{Q}_3] \tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{H}_2 (\mathbf{Q}_3 \mathbf{H}_2)^{-1} (\mathbf{I}_p \otimes \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T) \hat{\mathbf{e}}_R \right\} \quad (33)$$

Przedstawione zależności (22), (23), (27), (28), (31), (33), (34) umożliwiają obliczenia następującą procedurą iteracyjną:

Krok 1 ($j = 0$): obliczenie estymatora parametrów modelu $\hat{\mathbf{t}} = [\hat{\mathbf{t}}_1, \hat{\mathbf{t}}_2]^T$ tradycyjną metodą NK

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{t}}_1^{(j=0)} \\ \hat{\mathbf{t}}_2^{(j=0)} \end{bmatrix} = \left([\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2]^T \mathbf{P}_d \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2]^T \mathbf{P}_d \tilde{\mathbf{d}} \quad (34)$$

Krok 2 ($j = 1, \dots, k$, k – liczba iteracji):

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1^{(j)} &= \left((\hat{\mathbf{t}}_2^{(j-1)})^T \otimes \mathbf{I}_n \right) \mathbf{P}_R (\hat{\mathbf{t}}_2^{(j-1)} \otimes \mathbf{I}_n) + \mathbf{P}_d = \\ &= (\bar{\mathbf{E}}_R^{(j-1)})^T \mathbf{P}_R (\bar{\mathbf{E}}_R^{(j-1)}) + \mathbf{P}_d \\ \mathbf{Q}_3^{(j)} &= \mathbf{H}_2^T (\mathbf{Q}_1^{(j)})^{-1} \mathbf{I}_n - \mathbf{H}_1 (\mathbf{H}_1^T (\mathbf{Q}_1^{(j)})^{-1} \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{H}_1^T (\mathbf{Q}_1^{(j)})^{-1} = \\ &= \mathbf{H}_2^T (\mathbf{Q}_1^{(j)})^{-1} \left\{ \mathbf{I}_n - \mathbf{H}_1 (\mathbf{H}_1^T (\mathbf{Q}_1^{(j)})^{-1} \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{H}_1^T (\mathbf{Q}_1^{(j)})^{-1} \right\} \\ \hat{\mathbf{t}}_1^{(j)} &= (\mathbf{H}_1^T (\mathbf{Q}_1^{(j)})^{-1} \mathbf{H}_1)^{-1} \mathbf{H}_1^T (\mathbf{Q}_1^{(j)})^{-1} \\ &\left\{ [\mathbf{I} - \mathbf{H}_2 (\mathbf{Q}_3^{(j)} \mathbf{H}_2)^{-1} \mathbf{Q}_3^{(j)}] \tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{H}_2 (\mathbf{Q}_3^{(j)} \mathbf{H}_2)^{-1} (\mathbf{I}_p \otimes \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T) \bar{\mathbf{e}}_R^{(j-1)} \right\} \\ \hat{\mathbf{t}}_2^{(j)} &= (\mathbf{Q}_3^{(j)} \mathbf{H}_2)^{-1} [\mathbf{Q}_3^{(j)} \tilde{\mathbf{d}} - (\mathbf{I}_p \otimes \hat{\boldsymbol{\lambda}}^T) \bar{\mathbf{e}}_R^{(j-1)}] \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(j)} &= -(\mathbf{Q}_1^{-1})^{(j)} (\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{H}_1 \hat{\mathbf{t}}_1^{(j)} - \mathbf{H}_2 \hat{\mathbf{t}}_2^{(j)}) \\ \bar{\mathbf{P}}_R^{(j)} &= -\mathbf{P}_R (\hat{\mathbf{t}}_2^{(j)} \otimes \mathbf{I}_n) \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(j)} \Rightarrow \bar{\mathbf{E}}_R^{(j)} \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(j)} &= \mathbf{P}_d \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{(j)} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}}_1^{(j)} &:= \hat{\mathbf{t}}_1^{(j-1)} \\ \hat{\mathbf{t}}_2^{(j)} &:= \hat{\mathbf{t}}_2^{(j-1)} \\ \bar{\mathbf{e}}_R^{(j)} &:= \bar{\mathbf{e}}_R^{(j-1)} \Rightarrow \bar{\mathbf{E}}_R^{(j)} := \bar{\mathbf{E}}_R^{(j-1)} \end{aligned} \quad (36)$$

Krok 3: Proces iteracyjny kończy się dla takiego $j = k$, gdy $\|\hat{\mathbf{t}}_1^{(k)} - \hat{\mathbf{t}}_1^{(k-1)}\| < \tau_p$, $\|\hat{\mathbf{t}}_2^{(k)} - \hat{\mathbf{t}}_2^{(k-1)}\| < \tau_p$ (gdzie: τ_t – przyjęte a priori dokładności obliczeń numerycznych).

PRZYKŁAD PRAKTYCZNEGO ZASTOSOWANIA

W celu zbadania właściwości praktycznych MTLS dokonano analiz empirycznych wykonanych na wartościach przemieszczeń pionowych nabrzeża kanału portowego. Podczas wyznaczania przemieszczeń, w tym także przemieszczeń pionowych na obszarach portów, możliwe jest zasłonięcie lub zniszczenie punktu w trakcie eksploatacji nabrzeża. Niedogodności te mogą wynikać z procesu składowania kontenerów (na przykład rys. 2).

Proces modelowania matematycznego przemieszczeń pionowych nabrzeża, traktowanego jako bryła sztywna, może być w takich sytuacjach wykorzystany także do predykcji przemieszczeń punktów niewidocznych.

W dalszych analizach wykorzystano dane przedstawione na szkicu w pracy [6] (str. 130) oraz mapę uzyskaną z serwisu internetowego „Google Maps” [15]. Kompilując powyższe dane, przedstawiono schematycznie lokalizację i numery kontrolowanych punktów nabrzeża ukazane na rys. 3 (zrzut z ekranu). Dane te wykorzystano w obliczeniach numerycznych.

W tabl. 1 przedstawiono współrzędne płaskie X , Y punktów kontrolowanych, jak również uzyskane przemieszczenia pionowe $\tilde{d}$, [6] (str. 137).

Tabl. 1. Współrzędne płaskie X i Y oraz przemieszczenia $\tilde{d}$ punktów kontrolowanych

Nr punktu	X [m]	Y [m]	Wariant I $\tilde{d}$ [mm]	Wariant II $\tilde{d}$ [mm]
261	663,567	671,651	-0,3	-10
263	636,458	638,269	-0,3	-3
265	633,857	617,647	-0,6	-19
267	666,153	590,908	0,7	-7
271	664,589	543,014	0,4	-15
275	663,052	495,062	0,5	-2
279	661,478	447,076	0,4	4
283	659,944	399,100	0,8	8
287	658,389	351,024	0,6	-22
291	656,814	303,070	0,7	–
295	655,286	255,300	0,8	0
297	654,576	233,069	0,7	4

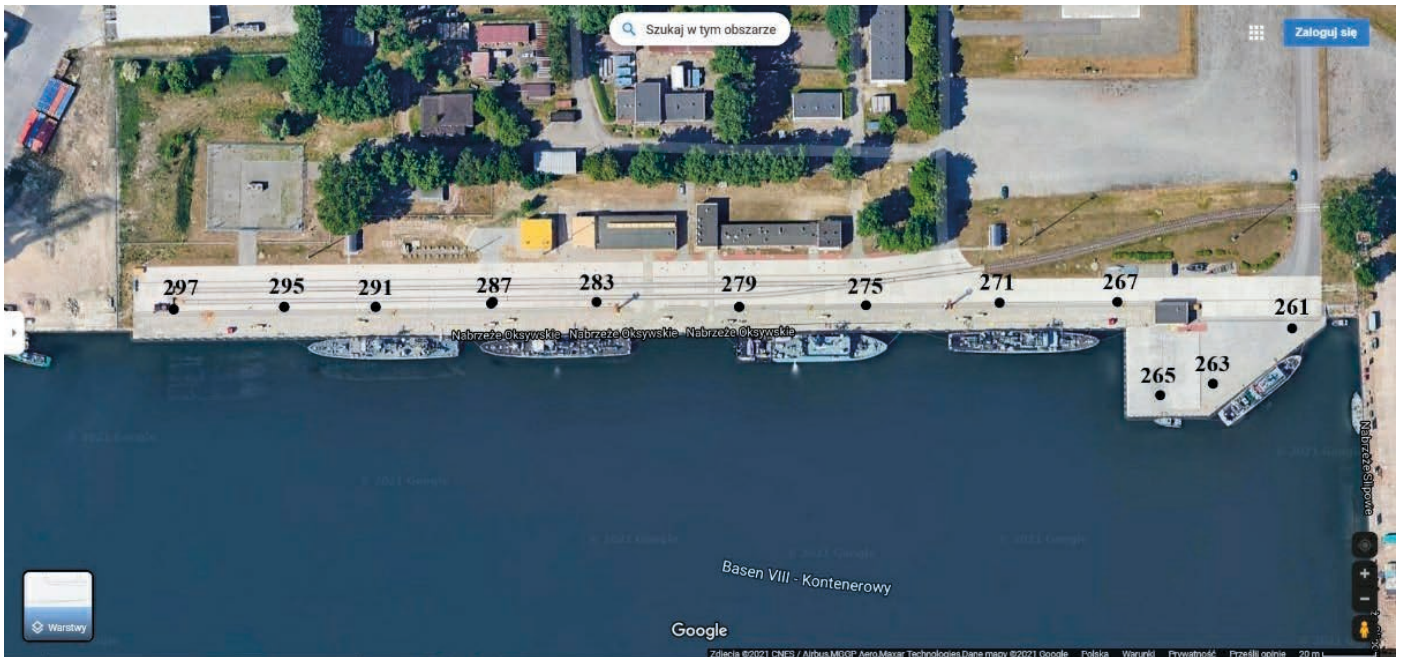
Obliczenia numeryczne wykonano w dwóch wariantach:

- wariant I – wykorzystano wyniki zamieszczone w pracy [6 (str. 137)],
- wariant II – dokonano symulacji wybranych wartości przemieszczeń pionowych.

Do obliczeń przyjęto diagonalne macierze wag: $\mathbf{P}_d = \text{diag}(1, \dots, 1)$, $\mathbf{P}_R = \text{diag}(1, \dots, 1)$.



Rys. 2. Bałtycki Terminal Kontenerowy w Porcie w Gdyni [16]



Rys. 3. Lokalizacja i numery kontrolowanych punktów nabrzeża [6 (str. 130), 15]

Tabl. 2. Poprawki $\hat{\delta}$ oraz $\hat{\vartheta}_x, \hat{\vartheta}_y$ uzyskane z obliczeń wariantu I

SMNK		MTLS		
Numer punktu	Poprawki $\hat{\delta}$ [mm]	Poprawki $\hat{\delta}$ [mm]	Poprawki $\hat{\vartheta}_x$ [mm]	Poprawki $\hat{\vartheta}_y$ [mm]
261	0,399	0,399	-0,010	0,000
263	-0,177	-0,178	0,004	0,000
265	0,104	0,104	-0,002	0,000
267	-0,368	-0,368	0,009	0,000
271	-0,003	-0,003	0,000	0,000
275	-0,038	-0,038	0,001	0,000
279	0,127	0,127	-0,003	0,000
283	-0,208	-0,208	0,005	0,000
287	0,058	0,058	-0,001	0,000
295	-0,012	-0,012	0,000	0,000
297	0,118	0,118	-0,003	0,000

Realizując algorytm obliczeń, uzyskano w wariancie I następujące wyniki (tabl. 2).

W tabl. 2 przedstawiono otrzymane wartości poprawek $\hat{\delta}$ do przemieszczeń pionowych. Łatwo zauważyć, że w obu analizowanych metodach (SMNK i MTLS) wielkości poprawek $\hat{\delta}$ są identyczne. Natomiast wartości poprawek $\hat{\vartheta}_x$ do współrzędnych X należą do przedziału $<-0,010 \text{ mm}; 0,009 \text{ mm}>$. W analizowanym przykładzie można stwierdzić, że są one nieistotne. Poprawki $\hat{\vartheta}_y$ są do wszystkich punktów równe zero. Można zatem przyjąć, że w wariancie I do uzyskania prawidłowych obliczeń wystarczy wykonać estymację SMNK.

Uzyskane z obliczeń wartości parametrów $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ wariantu I przedstawiono w tabl. 3.

Tabl. 3. Wartości parametrów $\hat{a}$ wariantu I

Parametry $\hat{a}$	SMNK	MTLS
$\hat{a}_0$	-14,3099 [mm]	-14,3043 [mm]
$\hat{a}_1$	0,0239 [mm/m]	0,0239 [mm/m]
$\hat{a}_2$	-0,0021 [mm/m]	-0,0021 [mm/m]

Wykorzystując otrzymane wartości parametrów $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, możemy dokonać predykcji przemieszczenia pionowego punktu 291. Ponieważ punkt nr 291 ma współrzędne $X = 656,814$ m, $Y = 303,070$ m, uzyskamy ($d_{\hat{z}_i} = a_0 + a_1 X_i + a_2 Y_i$)

$$d_{\hat{z}_{291}} = -14,3099 + 0,0239 \cdot 656,814 - 0,0021 \cdot 303,070 = 0,75 \text{ mm}$$

Natomiast rzeczywista, podana w tabl. 1, wielkość przemieszczenia punktu 291 wynosi $d_{z_{291}} = 0,7$ mm. Stąd otrzymany błąd predykcji wynosi $\varepsilon = 0,05$ mm.

Komentując wyniki przedstawione w tabl. 2, zauważamy, że obie metody (SMNK i MTLs) pozwoliły na uzyskanie podobnych wyników estymacji. Niewielka różnica dotyczy jedynie parametru $\hat{a}_0$, sugerując pewne przesunięcie płaszczyzn optymalnych o wartość:

$$-14,3099 + 14,3043 = -0,0056 \text{ mm.}$$

Wyniki obliczeń wariantu II zestawiono w tabl. 4.

Tabl. 4. Poprawki $\hat{\delta}$ oraz $\hat{\vartheta}_x$, $\hat{\vartheta}_y$ uzyskane z obliczeń wariantu II

SMNK		MTLS		
Numer punktu	Poprawki $\hat{\delta}$ [mm]	Poprawki $\hat{\delta}$ [mm]	Poprawki $\hat{\vartheta}_x$ [mm]	Poprawki $\hat{\vartheta}_y$ [mm]
261	0,385	0,389	-0,037	0,009
263	-8,398	-8,480	0,809	-0,204
265	7,849	7,926	-0,756	0,190
267	-0,428	-0,432	0,041	-0,010
271	8,574	8,658	-0,826	0,208
275	-3,420	-3,454	0,329	-0,083
279	-8,417	-8,499	0,811	-0,204
283	-11,402	-11,522	1,099	-0,277
287	19,597	19,788	-1,888	0,478
295	-0,399	-0,403	0,038	-0,010
297	-3,933	-3,971	0,379	-0,095

Komentując uzyskane wartości $\hat{\delta}$, należy stwierdzić, że istnieją niewielkie różnice pomiędzy obiema metodami. Wartości bezwzględnych różnic $|\hat{\delta}_{SMNK} - \hat{\delta}_{MTLS}|$ należą do przedziału $< 0,038 \text{ mm}; 0,191 \text{ mm} >$. Największa różnica jest pomiędzy poprawkami obliczonymi dla punktu 287, natomiast najmniejsza dla punktu 297. Wartości poprawek $\hat{\vartheta}_x$ i $\hat{\vartheta}_y$ do współrzędnych X i Y są już bardziej widoczne niż te uzyskane z wariantu I. Poprawki do współrzędnych X należą do przedziału $< -1,888 \text{ mm}; 1,099 \text{ mm} >$. Natomiast poprawki do współrzędnych Y przyjmują wartości z przedziału $< -0,277 \text{ mm}; 0,478 \text{ mm} >$.

W tabl. 5 przedstawiono otrzymane z obliczeń wartości parametrów $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$.

Tabl. 5. Wartości parametrów $\hat{a}$ wariantu II

Parametry $\hat{a}$	SMNK	MTLS
$\hat{a}_0$	-12,1460 [mm]	-12,1460 [mm]
$\hat{a}_1$	0,0280 [mm/m]	0,0280 [mm/m]
$\hat{a}_2$	-0,0249 [mm/m]	-0,0249 [mm/m]

Z danych przedstawionych w tabl. 5 wynika, że stosując zarówno SMNK, jak i MTLs, uzyskano takie same wartości parametrów estymowanego modelu przemieszczeń pionowych.

POSUMOWANIE

W niniejszej pracy przedstawiono problematykę modelowania przemieszczeń pionowych z wykorzystaniem MTLs. Teoretyczne rozważania uzupełniono przykładem praktycznego zastosowania zrealizowanym w dwóch wariantach. Wariant I to estymacja oparta na rzeczywistych wynikach przemieszczeń pionowych. Natomiast w wariantie II dokonano pewnej modyfikacji wyników przyjętych w wariantie I. Podsumowując, należy stwierdzić, że w przypadku małych (na przykład takich jak w wariantie I) wartości przemieszczeń pionowych zarówno przy zastosowaniu SMNK, jak i MTLs, otrzymano te same wyniki. Stąd wniosek ogólny, że dla małych przemieszczeń pionowych modelowanie całego obiektu inżynierskiego traktowanego jako bryła sztywna można wykonać SMNK. Natomiast w sytuacjach większych wartości przemieszczeń pionowych (na przykład takich jak w wariantie II) modelowanie powierzchni obiektu inżynierskiego powinno być realizowane z wykorzystaniem MTLs. Uzasadnieniem tego stwierdzenia są pojawiające się w wyniku estymacji poprawki do współrzędnych płaskich X i Y punktów kontrolowanych. Oczywiście wówczas, gdy w procesie modelowania przemieszczeń pionowych wykorzystujemy współrzędne X oraz Y występujące na przykład w funkcjach wielomianowych.

Otwartym zagadnieniem pozostaje problem ustalenia granic przedziału dopuszczalnego, po przekroczeniu którego w obliczeniach należy zastosować MTLs. W tym celu należy przeprowadzić szereg badań zwłaszcza empirycznych realizowanych na różnych obiektach inżynierskich i zbiorach danych.

Analizowana problematyka może znaleźć zastosowanie także w procesie modelowania przemieszczeń poziomych oraz pionowych uzyskanych z opracowania wyników obserwacji wykonanych w ramach naziemnego i lotniczego skaningu laserowego, jak również z użyciem dronów (powietrznych, nawodnych oraz podwodnych).

LITERATURA

1. Akyilmaz O.: Total least squares solution of coordinate transformation. Survey Review, 39(303), 2007, 68-80.
2. Chang G.: On least-squares solution to 3D similarity transformation problem under Gauss-Helmert model. Journal of Geodesy, 89(6), 2015, 573-576.
3. Fang X.: Weighted total least squares solutions for applications in geodesy. Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik der Leibniz-Universität, Hannover 2011.
4. Felus Y. A.: Application of total least squares for spatial point process analysis. Journal of Surveying Engineering, 130(3), 2004, 126-133.
5. Golub G. H. i van Loan C. F.: An analysis of the total least - squares problem. SIAMJ Numer Anal, 17(6), 1980, 883-893.
6. Cuiping Guo, Junhuan Peng, Chuantao Li: On mixed total least squares for parameter estimation. IJAMML 6:1 March 2017 ISSN: 2394-2258 Available at <http://scientificadvances.co.in> DOI: http://dx.doi.org/10.18642/ijamml_7100121816, 15-25, 2017.

7. van Huffel S., Vandewalle J.: The total least squares problem: computational aspects and analysis. SIAM, Philadelphia, 1991.
8. Kurałowicz Z. i inni: Geodezja inżynierska. Pomiary i obliczenia, przemieszczenia budowli oraz obsługa geodezyjna. Praca zbiorowa. Gdańsk. ISBN 978-83-929506-6-0, 2013.
9. Mahboub V.: On weighted total least-squares for geodetic transformations. *Journal of Geodesy*, 86(5), 2012, 59-67.
10. Mahboub V., Sharifi M. A.: On weighted total least-squares with linear and quadratic constraints. *Journal of Geodesy*, 87(3), 2013, 279-286.
11. Schaffrin B., Wieser A.: On weighted total least-squares adjustment for linear regression. *Journal of Geodesy*, 82(7), 2008, 415-421.
12. Shen Y., Li B., Chen Y.: An iterative solution of weighted total least-squares adjustment. *Journal of Geodesy*, 85(4), 2011, 229-238.
13. Tong X., Jin Y., Li L.: An improved weighted total least squares method with applications in linear fitting and coordinate transformation. *Journal of Surveying Engineering*, 137(4), 2011, 120-128.
14. Xu P., Liu J., Zeng W., Shen Y.: Effects of errors-in-variables on weighted least squares estimation *Journal of Geodesy*, 88(7), 2014, 705-716.
15. Google Maps, <https://www.google.pl/maps/@53.7691191,20.4263171,13z> (dostęp 19.09.2021).
16. <https://www.bct.gdynia.pl/> (dostęp 18.09.2021).